INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG VON

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XVI. BAND · FÜNFTES UND SECHSTES (SCHLUSS-) HEFT · 1948

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Preis M 26.—

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 30—40 Bogen vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Hardenbergstraße 34

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Karlsruhe i. B., Technische Hochschule

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Braunschweig, Harzburger Straße 8 a

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 24 40

Berlin-Charlottenburg 2
Jebensstraße 1
Fernsprecher 32 20 70

Inhalt:

Seite

Dörr, Johannes, Das Schwingungsverhalten eines federnd gebetteten, unendlich langen Balkens *(Dorsten i. Westf., 14. 7. 1912)* 287

Reutter, Fritz, Eine ebene Potentialströmung in der Umgebung der Schallgeschwindigkeit *(Karlsruhe, 26. 8. 1911)* 299

Reutter, Fritz, Halbebene und Parallelstreifen mit veränderlichem Elastizitätsmodul *(Karlsruhe, 26. 8. 1911)* 307

Kahlert, Wolfgang, Der Einfluß der Trägheitskräfte bei der hydrodynamischen Schmiermitteltheorie *(Wuppertal-Barmen, 6. 7. 1917)* 321

Stange, Kurt, Über die Bewegung eines stabilen schweren symmetrischen Kreisels bei kleinen Störungen des Längsschwunges *(Erfurt, 6. 6. 1907)* 343

Swida, Waldemar, Die elastisch-plastische Biegung des krummen Stabes *(Borissow b. Wilna, 28. 1. 1903)* 357

Riegels, Fritz Wilhelm, Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen (I. Mitteilung) *(Mülheim/Ruhr, 17. 6. 1910)* 373

Lutz, Otto, Enthalpien, Entropien und Gleichgewichtskonstanten von Verbrennungsgasen *(Stuttgart-Bad Cannstatt, 8. 4. 1906)* 377

Stange, Kurt, Die zweckmäßige Auswertung von punktweise aufgenommenen Zeit-Weglinien *(Erfurt, 6. 6. 1907)* 383

Schunck, Theo-Ernst, Der zylindrische Schalenstreifen oberhalb der Beulgrenze *(Nürnberg, 8. 6. 1908)* 403

Richter, Wilhelm, Eindimensionale stationäre Gleichdruckströmung in bewegten Systemen *(Aussig, 24. 9. 1903)* 422

Goriupp, Kurt, Berichtigung 446

INGENIEUR-ARCHIV

XVI. BAND FÜNFTES UND SECHSTES HEFT 1948

Das Schwingungsverhalten eines federnd gebetteten, unendlich langen Balkens.

Von J. Dörr in Tübingen.

1. Aufgabenstellung. Ein unendlich langer, gerader Balken von überall gleicher Massebelegung und Biegesteifigkeit sei auf einem homogenen, federnden Untergrund gebettet. Über den Balken bewege sich eine Last mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Gesucht ist die Auslenkung des Balkens als Funktion des Ortes und der Zeit.

Bei der mathematischen Behandlung von Schwingungsproblemen des federnd gebetteten Balkens wurde bisher die Annahme gemacht, daß die Bettung aus vielen nebeneinander stehenden masselosen Einzelfedern besteht. Diese Bettung erfüllt die als *Zimmermann*sche Hypothese[1] bekannte Voraussetzung, daß zwischen Auslenkung und Kraft ein linearer Zusammenhang besteht, und daß eine Störungskraft nur an der Störungsstelle selbst eine Auslenkung hervorruft. Das ist in der Praxis nicht immer ausreichend erfüllt. Durch einen auf Erdreich oder Schotter gedrückten Stempel werden z. B. nicht nur die unter dem Stempel, sondern auch die in der Nachbarschaft liegenden Bereiche ausgelenkt. Die Abweichungen von der *Zimmermann*schen Hypothese wirken sich in der Nähe solcher Stellen besonders aus, wo sich die Belastung stark mit dem Ort ändert, wie z. B. an den Balkenenden oder an Knickstellen der Verformungskurve[2]. In unserem Fall sind diese Abweichungen von vernachlässigbarer Größe, da wir uns hier mit einem durchgehenden, beiderseits unendlich langen, homogenen Balken beschäftigen wollen, der also keine Enden hat und bei dem nur stetige und glatte Verformungskurven auftreten.

Die Annahme masseloser Bettungsfedern hat zur Folge, daß die Bettung allein kein schwingungsfähiges Kontinuum darstellt. Es kann deshalb keine Schwingungsenergie vom Balken in das Kontinuum der Bettung abgestrahlt werden. Das ist in Wirklichkeit nicht der Fall. Ein rollender Eisenbahnzug ist z. B. Quellort von nach allen Seiten sich ausbreitenden Bodenerschütterungen. Die Annahme masseloser Federn kann deshalb unter Umständen zu Ergebnissen führen, die mit der Wirklichkeit nicht ausreichend übereinstimmen. Eingehende Untersuchungen zeigen in der Tat, daß unsere Aufgabe für einen Geschwindigkeitsbereich der Störungslast $0 \leqq v < v_K$ zu praktisch vernünftigen Ergebnissen führt, daß aber für den Bereich $v \geqq v_K$ unbrauchbare Ergebnisse herauskommen[3]. Für $v = v_K$ wachsen mit der Zeit die Schwingungsauslenkungen über alle Grenzen und für $v - v_K$ bildet sich zu beiden Seiten der Störungsstelle je ein Wellenzug endlicher Auslenkung heraus, deren Länge proportional mit der Zeit bis ins Grenzenlose zunimmt. Das ist praktisch nicht möglich, da die innere Dämpfung und die Wellenabstrahlung ins Kontinuum der Bettung ein unbegrenztes Anwachsen der Auslenkungen und der Länge der Wellengruppen verhindert.

Eine Berücksichtigung der Wellenabstrahlung ins Kontinuum durch Annahme einer massebehafteten Bettung macht große mathematische Schwierigkeiten. Wir wollen deshalb den einfacheren Weg beschreiten, indem wir nur die innere Dämpfung des Balkens berücksichtigen. Wir werden im folgenden sehen, daß die Voraussetzung ausreicht, um für beliebig große Geschwindigkeitswerte v praktisch sinnvolle Ergebnisse für unsere Aufgabe zu gewinnen.

2. Lösungsansätze. Die Dämpfung des Balkens nehmen wir als proportional der Auslenkungsgeschwindigkeit an. Weiterhin setzen wir fest, daß sich die Störungslast P zur Zeit $t = 0$ an der Stelle $x = 0$ befindet. Unter der Voraussetzung kleiner Auslenkungen finden wir dann als Differentialgleichung unseres Problems:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + d \frac{\partial y}{\partial t} + cy = P \delta(x - vt) .$$

---

[1] *H. Zimmermann*, Die Berechnung des Eisenbahnoberbaus, S. 10. Berlin 1888.
[2] *K. Wieghard*, Z. angew. Math. Mech. 2 (1922). S. 165.
[3] *J. Dörr*, Ing.-Archiv 14 (1943). S. 167.

Darin bedeutet c die Federkonstante der Bettung je Längeneinheit, m die Massenbelegung des Balkens, d die Dämpfungskonstante je Längeneinheit, EJ die Biegesteifigkeit, v die Geschwindigkeit der bewegten Störungslast; x, y, t sind die Koordinaten des Ortes und der Zeit, und $\delta(x-vt)$ ist eine Zackenfunktion mit folgenden Eigenschaften:

$$\delta(x-vt)=\begin{cases}0 & \text{für } x\neq vt\\ \infty & \text{für } x=vt\end{cases}$$

mit

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{vt-\varepsilon}^{vt+\varepsilon}\delta(x-vt)\,dx=1\,.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\alpha=\frac{m}{EJ},\quad \beta=\frac{d}{EJ},\quad \gamma=\frac{c}{EJ} \tag{1a}$$

und setzen außerdem fest

$$\frac{P}{EJ}=1\,. \tag{1b}$$

Diese Festsetzung ist ohne Belang, da wegen der linearen Differentialgleichung ein linearer Zusammenhang zwischen der Störungskraft P und der Auslenkung y besteht.

Mit den neuen Bezeichnungen lautet unsere Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\alpha\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial y}{\partial t}+\gamma y=\delta(x-vt)\,. \tag{2}$$

Nach Vorgabe bestimmter Rand- und Anfangsbedingungen läßt sich eine Lösung von (2) mit den bekannten Methoden gewinnen. Wählt man z. B. als Ansatz für y ein *Fourier*integral oder ein *Laplace*integral, so erhält man die Lösung zunächst in Form eines verhältnismäßig komplizierten Integrals, dessen Berechnung im Sonderfalle kleiner Werte von t oder sehr großer Werte von t gelingt, wenn man die Dämpfung d sehr klein oder zu Null[1] annimmt. Von besonderer Bedeutung ist die sogenannte asymptotische Lösung der Aufgabe, d. h. diejenige, die sich nach sehr langer Zeit, also bei sehr großen Werten t einstellt. Bei Eigenwertproblemen der Technik erstrebt man z. B. meistens auch nur die Kenntnis der Resonanzschwingungsform, d. h. der Schwingungsform, die sich nach Überwindung des sogenannten Einschwingvorgangs einstellt. Diese Resonanzschwingungsform ist also eine solche asymptotische Lösung.

Zunächst wollen wir für das Folgende den Begriff der asymptotischen Lösung genau festlegen. Die allgemeine Lösung des Störungsproblems sei $y(x,t)$. Wenn sich für den Grenzfall $t\to\infty$ eine Lösung $Y(x,t)$ angeben läßt, welche überall die Bedingung

$$Y(x,t)-y(x,t)\leqq\varepsilon \text{ für } t\geqq T \tag{3}$$

für jedes von Null verschiedene, aber sonst beliebig kleine ε erfüllt, sofern T genügend groß gewählt wird, dann wollen wir $Y(x,t)$ eine asymptotische Lösung nennen.

Man kann die asymptotische Lösung durch den Grenzübergang $t\to\infty$ aus der allgemeinen Lösung gewinnen. Dieser im Abschnitt 5 kurz skizzierte Weg erfordert einen verhältnismäßig großen Arbeitsaufwand. Um schneller und bequemer zum Ziel zu kommen, wird deshalb im folgenden ein Verfahren angegeben, das direkt auf die Gewinnung der asymptotischen Lösung hinzielt.

Wir formen zu diesem Zwecke die Differentialgleichung (2) um auf ein mit der Störungskraft mitbewegtes Koordinatensystem, indem wir setzen

$$z=x-vt\,. \tag{4}$$

Man erhält dann

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}+\alpha\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-2v\frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial z}+v^2\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)+\beta\left(\frac{\partial y}{\partial t}-v\frac{\partial y}{\partial z}\right)+\gamma y=\delta(0)\,. \tag{5a}$$

Das Störungsglied auf der rechten Seite ist in dieser Darstellung von der Zeit unabhängig. Es besteht deshalb die Möglichkeit, daß bei beliebiger Wahl der Rand- und Anfangsbedingungen die asymptotische Lösung des Störungsproblems ebenfalls von der Zeit unabhängig ist. Falls

[1] *J. Dörr*, a. a. O. S. 175 und 131.

eine solche „stationäre" asymptotische Lösung $Y(z)$ existiert, muß sie also der Bedingung $\partial^n Y/\partial t^n = 0$ für $n \geq 1$ genügen und müßte deshalb unter Beachtung der Randbedingungen folgender Differentialgleichung gehorchen:

$$Y'''' + \alpha v^2 Y'' - \beta v Y' + \gamma Y = \delta(0)\,, \qquad (5\,\mathrm{b})$$

in welcher Striche Ableitungen nach z bedeuten. Es gilt nun folgender Satz:

Wenn eine Lösung $Y(z)$ von (5b) im gesamten Bereich des Balkens existiert, und wenn außerdem das über den gesamten Bereich ζ des Balkens erstreckte Integral von $Y^2(z)$ existiert, wenn also

$$\int_\zeta Y^2(z)\,dz = L \qquad (6)$$

ist, dann ist $Y(z)$ wirklich die asymptotische Lösung des Störungsproblems im Sinne der Bedingung (3). Das beweisen wir wie folgt: $Y(z)$ ist als Lösung von (5b) auch eine partielle Lösung von 5a). Die allgemeine Lösung von 5a) erfülle die Anfangsbedingungen $y(z,0)$, $\dot{y}(z,0)$. Diese allgemeine Lösung kann man sich grundsätzlich immer in folgender Weise zerlegt denken:

$$y(z,t) = Y(z) + h(z,t)\,.$$

Darin ist $h(z,t)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung von (5a), welche durch die Anfangsbedingungen

$$h(z,0) = y(z,0) - Y(z)\,,$$
$$\dot{h}(z,0) = \dot{y}(z,0)$$

eindeutig festgelegt ist. Die aus sogenannten freien Schwingungen zusammengesetzte Wellengruppe $h(z,t)$ wird durch die Dämpfungskräfte des Balkens im Laufe der Zeit aufgezehrt, so daß schließlich nur noch die asymptotische Wellengruppe $Y(z)$ übrig bleibt.

Die Voraussetzung (6) ist beim gedämpften Balken immer erfüllt. Das läßt sich auf Grund einer physikalischen Betrachtung einsehen. Die Wellengruppe $Y(z)$ braucht zu ihrer Erhaltung einen dauernden Energiezufluß von außen, da in der Zeiteinheit dauernd der Energiebetrag

$$L = v^2\,d\int Y^2\,dz$$

durch Dämpfung verlorengeht. Die verlorengehende Energie wird durch die Arbeitsleistung der Störungskraft $L = v\,P \sin \operatorname{arc\,tg}\, Y'(0)$ — bei kleinen Winkeln $L = v\,P\,Y'(0)$ — aufgebracht[1]. Diese äußere Arbeit kann nur von endlicher Größe sein, da auch die Störungskraft endlich ist und mit endlicher Geschwindigkeit weiterwandert. Beim gedämpften Balken müssen also erzwungene stationäre Schwingungen immer die Bedingung (6) erfüllen, denn nur dann läßt sich die erzwungene Störung durch eine endliche Störungskraft stationär erhalten.

Beim ungedämpften Balken kann auch der Fall eintreten, daß eine Lösung von (5b) die Bedingung (6) nicht erfüllt. Eine solche Lösung darf nicht als asymptotische Lösung des Störungsproblems angesehen werden, wie man durch folgende physikalische Betrachtung zeigen kann. Der Balken besitzt beim Schwingen kinetische Energie T und potentielle Energie V. Für V findet man

$$V = \frac{1}{2}\,c\int Y^2\,dz + \frac{1}{2}\,EJ\int\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}\right)^2 dz\,.$$

Die Funktion Y ist als Lösung von (5b) überall stetig und glatt. Wenn also Bedingung (6) erfüllt ist, dann existieren die beiden rechts stehenden Integrale, dann ist also V begrenzt. Für T findet man dasselbe Ergebnis. Ist dagegen Bedingung (6) nicht erfüllt, dann sind V und T unbegrenzt. Die Energie $T+V$ der stationären Schwingung muß durch die Störungskraft aufgebracht werden. Die Arbeitsleistung der Störungskraft ist immer von endlicher Größe. Es kann deshalb nur dann in endlicher Zeit die zum Aufbau einer stationären Schwingung erforderliche Energie von der Störungskraft erzeugt werden, wenn die Bedingung (6) erfüllt ist. Wenn das nicht der Fall ist, d. h., wenn $T+V$ unbegrenzt ist, dann ist auch nach beliebig langer Zeit der stationäre Schwingungszustand noch in unendlich weiter Ferne. Folglich existiert eine asymptotische stationäre Lösung des Störungsproblems im Sinne der Definition (3) nur dann, wenn die Lösung von (5b) die Bedingung (6) erfüllt. Dieser Fall hat durchaus praktische Bedeutung. Bei unserem Problem tritt er, wie wir sehen werden, unter gewissen Voraussetzungen auf.

[1] *J. Dörr*, a. a. O. S. 191.

Jetzt gehen wir an die Lösung der Differentialgleichung (5b). Nehmen wir einen beiderseits unendlichen Balken an, so eignet sich dazu der *Fourier*ansatz

$$Y = i \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(p)\, e^{-pz}\, dp\,. \tag{7a}$$

Für das Störungsglied erhalten wir aus dem *Fourier*schen Integraltheorem

$$\delta(0) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-pz}\, dp\,. \tag{7b}$$

Die Darstellungsart (7) des *Fourier*integrals wurde gewählt, um im folgenden bequemere Vergleichbarkeit mit der zitierten Arbeit zu haben.

Durch Einsetzen von (7) in (5b) ergibt sich für die noch zu bestimmende Funktion $f(p)$ der Ausdruck:

$$f(p) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{p^4 + \alpha v^2 p^2 + \beta v p + \gamma}\,.$$

Das setzen wir in (7a) ein und erhalten die gesuchte Lösung in Form eines bestimmten Integrals

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{-pz}}{p^4 + \alpha v^2 p^2 + \beta v p + \gamma}\, dp\,. \tag{8}$$

Die Pole des Integranden bestimmen sich durch die Gleichung

$$p^4 + \alpha v^2 p^2 + \beta v p + \gamma = 0\,. \tag{9a}$$

Im Falle $\beta \neq 0$, also bei Vorhandensein von Dämpfung, können auf der imaginären Achse keine Pole liegen, weil hier der Realteil $p^4 + \alpha v^2 p^2 + \gamma$ und der Imaginärteil $\beta v p$ der Gleichung (9a) keine gemeinsamen Nullstellen besitzen. Da in (9a) das Glied mit p^3 fehlt und alle Koeffizienten positiv reell sind, folgt dann aus dem *Hurwitz*schen Kriterium, daß sowohl Pole mit positivem als auch mit negativem Realteil auftreten müssen. Die Pole können nur reell oder konjugiert komplex sein. Deshalb müssen rechts der imaginären Achse zwei, und nur zwei konjugiert komplex angeordnete Pole liegen. Denn auf dem positiven Teil der reellen Achse kann kein Pol liegen, da hier alle Glieder von Gleichung (9a) nur positiv reell sind. Die beiden links der imaginären Achse liegenden Pole können konjugiert komplex angeordnet sein, falls β genügend klein ist. Bei hinreichend großem β können die beiden Pole auch auf der negativ reellen Achse liegen. Der Grenzfall, bei dem die eine Anordnung in die andere übergeht, ist dadurch gekennzeichnet, daß die beiden links der imaginären Achse liegenden Pole zu einem auf der reellen Achse liegenden Doppelpol zusammenfallen. Für diesen Doppelpol müssen folgende beide Bedingungen erfüllt sein:

$$F(p) \equiv p^4 + \alpha v^2 p^2 + \beta v p + \gamma = 0\,, \qquad \frac{dF(p)}{dp} = 0\,.$$

Alle Nullstellen des Ausdrucks $F'(p)$ treten auch in $\frac{1}{4}\, pF'(p)$ auf. Eine gemeinsame Nullstelle von $F(p)$ und $F'(p)$ bzw. das Auftreten eines Doppelpols im Integranden von (8) ist also nur bei Erfüllung folgender Bedingung möglich:

$$F(p) = \frac{1}{4}\, pF'(p)\,.$$

Setzt man die Funktionen ein, so heben sich die Glieder p^4 fort, und es bleibt ein quadratischer Ausdruck in p übrig. Löst man ihn nach p auf, so erhält man

$$p_m = -\frac{3}{4}\frac{\beta v}{\alpha v^2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\frac{\beta v}{\alpha v^2}\right)^2 - \frac{2\gamma}{\alpha v^2}}\,.$$

Wenn der unter der Wurzel stehende Ausdruck kleiner als Null ist, d. h., wenn

$$\beta < \frac{4}{3}\sqrt{2\gamma\alpha} \tag{9b}$$

ist, dann ist p_m komplex. Dann kann also auf der reellen Achse kein Doppelpol und somit überhaupt kein Pol des Integranden von (8) liegen.

Wir werden im folgenden nur den Fall kleiner Dämpfung, also kleiner β-Werte behandeln, so daß also obige Bedingung erfüllt ist. Die vier Pole wollen wir wie in Abb. 1 bezeichnen. Mit diesen Bezeichnungen findet man auf Grund des Residuensatzes

$$Y = \frac{1}{p_1 - p_4}\left[\frac{e^{-p_4 z}}{(p_4-p_2)(p_4-p_3)} - \frac{e^{-p_1 z}}{(p_1-p_2)(p_1-p_3)}\right] \text{ für } z > 0\,, \tag{10a}$$

$$Y = \frac{1}{p_2 - p_3}\left[\frac{-e^{-p_3 z}}{(p_3-p_1)(p_3-p_4)} + \frac{e^{-p_4 z}}{(p_2-p_1)(p_2-p_4)}\right] \text{ für } z < 0\,. \tag{10b}$$

Die Pole p_n lassen sich streng aus (9a) bestimmen. Da sich aber die Lösung einer Gleichung vierten Grades nicht in einfacher geschlossener Form hinschreiben läßt, ist dieser Weg für eine allgemeine Behandlung der Ergebnisse (10) nicht brauchbar. Wir schlagen einen bequemeren Weg ein, indem wir die Dämpfung, d. h. den Faktor β in Gleichung (8), als sehr klein annehmen. Dann lassen sich einfachere Näherungslösungen angeben.

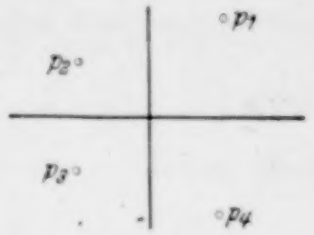

Abb. 1. Anordnung der Pole, wenn $\beta < \frac{4}{3}\sqrt{2\gamma\alpha}$.

Wir machen zu dem Zweck für die Nullstellen p_n von (9a) den Ansatz

$$p_n = \mathfrak{q}_n + r_n\,. \tag{11a}$$

Darin bedeutet $\mathfrak{q}_n$ eine der vier Lösungen:

$$\underset{34}{\mathfrak{q}_{12}} = \pm i\sqrt{\frac{1}{2}\,\alpha\, v^2\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\gamma}{\alpha^2 v^4}}\right)} = \pm i\sqrt{\frac{1}{2}\,\alpha\left(v^2 \pm \sqrt{v^4 - v_K^4}\right.} \tag{11b}$$

der biquadratischen Gleichung

$$\mathfrak{q}^4 + \alpha v^2 \mathfrak{q}^2 + \gamma = 0\,.$$

Dann erhalten wir für r die Bestimmungsgleichung

$$4\,\mathfrak{q}_n{}^3 r + 6\,\mathfrak{q}_n{}^2 r^2 + 4\,\mathfrak{q}_n r^3 + r^4 + \alpha v^2(2\,\mathfrak{q}_n r + r^2) + \beta v(\mathfrak{q}_n + r) = 0\,.$$

Da voraussetzungsgemäß β sehr klein ist, besitzt obige Gleichung eine Lösung mit sehr kleinem r, und zwar ist es die Lösung r_n, bei der für $\beta \to 0$ auch $r_n \to 0$ bzw. $p_n \to \mathfrak{q}_n$ geht. Um diese Lösung näherungsweise zu ermitteln, lassen wir in der Gleichung für z alle Glieder fort, in denen z und β in höherer als zweiter Potenz erscheinen:

$$r^2 + r\,\frac{4\,\mathfrak{q}_n{}^3 + 2\,\mathfrak{q}_n \alpha v^2 + \beta v}{6\,\mathfrak{q}_n{}^2 + \alpha v^2} + \frac{\beta v\,\mathfrak{q}_n}{6\,\mathfrak{q}_n{}^2 + \alpha v^2} = 0\,. \tag{11c}$$

Die Voraussetzungen, unter denen diese Gleichung ausreichend genaue Lösungen ergibt, werden im weiteren Verlauf der Untersuchungen im einzelnen angegeben.

Der bei r stehende Faktor in (11c) kann sehr klein werden, da der Ausdruck

$$4\,\mathfrak{q}_n{}^3 + 2\,\mathfrak{q}_n \alpha v^2 = \pm\,\mathfrak{q}_n\sqrt{\alpha^2 v^4 - 4\gamma}$$

Null wird, wenn die Störungsgeschwindigkeit v den Wert erreicht

$$v = v_K = \sqrt[4]{\frac{4\gamma}{\alpha^2}}\,. \tag{12}$$

Aus diesem Grunde mußte in Gleichung (11c) nicht nur das lineare, sondern auch das quadratische Glied in r berücksichtigt werden. Wir bezeichnen v_K als kritische Geschwindigkeit der Störungslast, weil hier, wie wir bald sehen werden, die erzwungenen Schwingungen besonders große Amplituden annehmen, bei Dämpfungsfreiheit sogar unendlich große.

3. Lösung des Störungsproblems. Im weiteren Verlauf der Untersuchung müssen wir die drei Fälle $v = v_K$, $v < v_K$ und $v > v_K$ getrennt behandeln.

a) Behandlung des Falles $v = v_K$. Aus den Gleichungen (11b) und (11c) findet man nach einigen Umformungen, wenn man alle Glieder vernachlässigt, die in β von höherer als erster Ordnung sind,

$$\underset{34}{\mathfrak{q}_{12}} = \pm i v_K\sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \pm i\sqrt[4]{\gamma}\,, \qquad \underset{2}{r_1} = \pm(1+i)\,\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{\beta^2}{2\alpha}}\,, \qquad \underset{4}{r_3} = \mp(1-i)\,\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{\beta^2}{2\alpha}}\,.$$

Das obere Vorzeichen bezieht sich jeweils auf die oberen Zeiger, das untere Vorzeichen dagegen auf die unteren Zeiger. Diese Formeln geben nur dann eine gute Näherungslösung für die Pole, wenn die r_i sehr klein sind gegenüber $q_1 - q_3$ bzw. $q_2 - q_4$. Das ist, wie man leicht zeigen kann, erfüllt unter der Voraussetzung:

$$\beta \ll \frac{4}{3}\sqrt{2\gamma\alpha}\,.$$

Damit ist auch die Bedingung (9b) erfüllt.

Die Ausdrücke q_i und r_i setzen wir unter Beachtung von (11a) in die Formeln (10) ein. Man erhält, wenn man zur Vereinfachung der Schreibweise

$$\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{\beta^2}{2\alpha}} = \varrho$$

setzt und die $r_n - r_m$ durch ϱ ausdrückt,

$$Y = \frac{-e^{-\varrho z}}{8\,i\,(\gamma^{1/4}+\varrho)}\left[\frac{e^{i(\gamma^{1/4}+\varrho)z}}{(i\gamma^{1/4}-\varrho)\,(1-i)\varrho} + \frac{e^{-i(\gamma^{1/4}+\varrho)z}}{(i\gamma^{1/4}+\varrho)\,(1+i)\varrho}\right] \text{ für } z>0\,,$$

$$Y = \frac{-e^{-\varrho z}}{8\,i\,(\gamma^{1/4}-\varrho)}\left[\frac{e^{i(\gamma^{1/4}-\varrho)z}}{(i\gamma^{1/4}+\varrho)\,(1-i)\varrho} - \frac{e^{-i(\gamma^{1/4}-\varrho)z}}{(i\gamma^{1/4}-\varrho)\,(1+i)\varrho}\right] \text{ für } z<0\,.$$

Daraus findet man nach einigen weiteren Umformungen

$$\left.\begin{aligned} Y &= \frac{e^{-\varrho z}}{8\varrho}\left[\frac{\cos(\gamma^{1/4}+\varrho)z}{\gamma^{1/2}+\varrho^2} - \frac{(\gamma^{1/4}-\varrho)^2\sin(\gamma^{1/4}+\varrho)z}{\gamma-\varrho^4}\right] \text{ für } z>0\,,\\ Y &= \frac{e^{+\varrho z}}{8\varrho}\left[\frac{\cos(\gamma^{1/4}-\varrho)z}{\gamma^{1/2}+\varrho^2} - \frac{(\gamma^{1/4}+\varrho)^2\sin(\gamma^{1/4}-\varrho)z}{\gamma-\varrho^4}\right] \text{ für } z<0\,. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Die Bahneigung am Angriffspunkt $z=0$ der Störungskraft ist, wenn man alle vernachlässigbar kleinen Glieder fortläßt,

$$Y'(0) = \frac{-1}{8\varrho\gamma^{1/4}}\,. \tag{14}$$

b) Behandlung des Falles $v<v_K$. Die Formeln (10) haben folgenden grundsätzlichen Aufbau:

$$Y = (a - i\,b_1)e^{-(\varrho - i\sigma_1)z} + (a + i\,b_1)e^{-(\varrho + i\sigma_1)z} \text{ für } z>0\,,$$

$$Y = (a - i\,b_2)e^{(\varrho + i\sigma_2)z} + (a + i\,b_2)e^{(\varrho - i\sigma_2)z} \text{ für } z<0\,.$$

Darin ist wie durch Vergleich mit (10) zu ersehen ist,

$$\varrho + i\sigma_1 = p_1\,,\quad \varrho + i\sigma_2 = -p_3\,, \tag{15a}$$

$$a + i\,b_1 = \frac{-1}{(p_1-p_4)(p_1-p_2)(p_1-p_3)}\,, \tag{15b}$$

$$(a + i\,b_2 = \frac{1}{(p_2-p_3)(p_2-p_1)(p_2-p_4)}\,. \tag{15c}$$

Wir setzen wieder $p_n = q_n + r_n$. Darin sind die q_n durch Formel (11b) gegeben. Die r_n lassen sich durch (11c) berechnen, und damit lassen sich auch a und b angeben. Die Ausdrücke wären aber außerordentlich unhandlich. Brauchbare Formeln erhält man, wenn man in (11c) das Glied r^2 vernachlässigen darf. Das ist der Fall, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\left|\frac{(6\,q_n^2 + \alpha v^2)\beta v}{(2\,q_n^2 + \alpha v^2)^2 q_n}\right| \ll 1\,.$$

Für q_n setzen wir den Ausdruck (11b) ein und erhalten unter Beachtung von (12):

$$\left|\frac{(2v^2 \mp 3\sqrt{v^4 - v_K^4})\beta v}{\alpha(v^4 - v_K^4)\sqrt{\frac{1}{2}\alpha\left(v^2 \pm \sqrt{v^4 - v_K^4}\right)}}\right| \ll 1\,.$$

Diese Bedingung ist für $v \to 0$ und $v \to \infty$ immer erfüllbar, sofern β einen festen, aber sonst beliebig großen Wert hat. Wenn β kleiner wird, rückt der Gültigkeitsbereich obiger Bedingung

von beiden Seiten an v_K heran. Sofern β genügend klein gewählt wird, läßt sich immer erreichen, daß obige Bedingung überall mit Ausnahme des beliebig kleinen, aber festen Bereichs $|v-v_K| \leqq \varepsilon \ll v_K$ erfüllt ist.

Es sei nun β tatsächlich so klein, daß $\varepsilon \ll v_K$ ist. Dann dürfen wir in der letzten Formel überall v durch v_K ersetzen, wo es nicht in der Form $(v-v_K)$ auftritt. Die Größe $(v-v_K)$ dürfen wir außerdem überall vernachlässigen, wo sie als Summand neben v auftritt. Daraus erhält man die nur für sehr kleine β-Werte erfüllbare Bedingung

$$v_K \gg \varepsilon \gg \frac{\beta}{\sqrt{2\,\alpha^3 v_K}}. \tag{16}$$

Im Falle $|v-v_K| \geqq \varepsilon$ darf in (11c) das Glied r^2 vernachlässigt werden, und es ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} r_{\substack{13\\24}} &= \pm \frac{i\beta v}{\alpha\sqrt{v_K^4 - v^4}} \quad \text{für } v < v_K, \\ r_{\substack{14\\23}} &= \pm \frac{\beta v}{\alpha\sqrt{v^4 - v_K^4}} \quad \text{für } v > v_K. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Im Falle $v < v_K$ erhalten wir dann mit Hilfe von (15) und (17) aus (11a)

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \frac{1}{2}\sqrt{\alpha\,(v_K^2 - v^2)}, \\ \sigma_{\substack{1\\2}} &= \frac{1}{2}\sqrt{\alpha\,(v_K^2 + v^2)} \pm \frac{\beta v}{\alpha\sqrt{v_K^4 - v^4}}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Man kann leicht zeigen, daß die Bedingung (16) folgende Ungleichung zur Folge hat:

$$|r_n - r_m| \ll |q_n - q_m| \quad (n, m = 1, \ldots 4).$$

Setzt man in den Formeln (15b) und (15c), wie vorgesehen, $p_n = q_n + r_n$, so darf man also nach steigenden Potenzen von r_n entwickeln und gewinnt eine ausreichend genaue Näherungsformel, wenn man alle Glieder von höherer als erster Potenz vernachlässigt. Aus

$$a + i\,b_1 = \frac{-1}{(q_1 - q_4 + 2r_1)\,(q_1 - q_2 + 2r_1)\,2\,q_1},$$

$$a + i\,b_2 = \frac{1}{(q_2 - q_3 - 2r_1)\,(q_2 - q_1 - 2r_1)\,2\,q_2}$$

findet man nach längeren, aber einfachen Umformungen durch Reihenentwicklung und Streichung aller Glieder, die in β von höherer als linearer Ordnung sind,

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{4\sqrt{\alpha\gamma}\sqrt{v_K^2 - v^2}}, \\ b_{\substack{1\\2}} &= \pm \frac{1}{4\sqrt{\alpha\gamma}\sqrt{v_K^2 + v^2}} - \beta \frac{2v}{\alpha^3 (v_K^4 - v^4)^{3/2}}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Mit (18) und (19) lautet dann für den Fall $v < v_K - \varepsilon$ die Lösung des Störungsproblems

$$Y(z) = 2e^{-\varrho z}(a\cos\sigma_1 z + b_1 \sin\sigma_1 z) \text{ für } z > 0, \tag{20a}$$

$$Y(z) = 2e^{\varrho z}(a\cos\sigma_2 z + b_2 \sin\sigma_2 z) \quad \text{für } z < 0. \tag{20b}$$

Die Bahnneigung an der Störungsstelle $z = 0$ ist

$$Y'(0) = -2\varrho a + 2\sigma_1 b_1 = +2\varrho a + 2\sigma_2 b_2.$$

Einsetzen von (18) und (19) ergibt nach einigen Umformungen

$$Y'(0) = \frac{-\beta v}{[\alpha(v_K^2 - v^2)]^{3/2}\,\alpha\, v_K^2} \text{ für } v < v_K - \varepsilon. \tag{21}$$

c) Behandlung des Falles $v > v_K$. Unter Beachtung der Formeln (15) bis (17) erhält man

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \frac{\beta v}{\alpha\sqrt{v^4 - v_K^4}}, \\ \sigma_{\substack{1\\2}} &= \sqrt{\frac{1}{2}\,\alpha\left(v^2 \pm \sqrt{v^4 - v_K^4}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Für die folgenden Rechnungen brauchen wir die Ausdrücke

$$\mathfrak{q}_1-\mathfrak{q}_2=\sigma_1-\sigma_2=i\sqrt{\alpha\,(v^2-v_K{}^2)}\;,$$
$$\mathfrak{q}_1+\mathfrak{q}_2=\sigma_1+\sigma_2=i\sqrt{\alpha\,(v^2+v_K{}^2)}\;.$$

Wir denken uns jetzt die Lösung genau so wie in den Formeln (20) dargestellt und finden für a, b_1 und b_2 die Beziehungen:

$$a+i\,b_1=\frac{-1}{2\,\mathfrak{q}_1(\mathfrak{q}_1-\mathfrak{q}_2+2\,r_1)\,(\mathfrak{q}_1+\mathfrak{q}_2+2\,r_1)}\;,$$
$$a+i\,b_2=\frac{1}{2\,\mathfrak{q}_2(\mathfrak{q}_2-\mathfrak{q}_1-2\,r_1)\,(\mathfrak{q}_2+\mathfrak{q}_1-2\,r_1)}\;.$$

Unter Benutzung der oben angegebenen Ausdrücke $\mathfrak{q}_1\pm\mathfrak{q}_2$ und Formel (17) erhält man daraus nach längeren Umformungen

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{2\,\beta\,v}{\alpha^3\,(v^4-v_K{}^4)^{3/2}}\;,\\ b_{\frac{1}{2}}&=\frac{-1}{2\,\alpha\sqrt{\frac{1}{2}\,\alpha\,(v^2\pm\sqrt{v^4-v_K{}^4})}\,\sqrt{v^4-v_K{}^4}}\;. \end{aligned}\right\}\tag{23}$$

Die Ausdrücke (20a) und (20b) geben auch für den Fall $v>v_K+\varepsilon$ die Lösung an, wenn für ϱ, σ, a, b die Beziehungen (22) und (23) eingesetzt werden.

Für die Bahnneigung an der Störungsstelle $z=0$ findet man:

$$Y'(0)=\frac{-1}{\alpha\sqrt{v^4-v_K{}^4}}\quad\text{für}\quad v>v_K+\varepsilon\,.\tag{24}$$

Die Glieder mit β treten erst von der zweiten Potenz an aufwärts auf und sind voraussetzungsgemäß weggelassen worden.

4. Auswertung der Ergebnisse. Die an der Störungsstelle vorhandene Bahnneigung $Y'(0)$ hat zur Folge, daß die Störungskraft P dauernd in der Zeiteinheit eine Arbeit leisten muß. Bei Annahme kleiner Auslenkungen ist diese Leistung von der Größe:

$$L=-v\;P\;Y'(0)\,.$$

In unseren bisherigen Untersuchungen wurde zur Vereinfachung der Schreibweise die Störungskraft gleich EJ gesetzt, wie aus (1b) hervorgeht. Wir setzen jetzt die Störungskraft allgemein gleich P und finden damit

$$L_1=\frac{\sqrt{E\,J}\,P^2v^2\,d}{m\,v_K{}^2\,[m\,(v_K{}^2-v^2)]^{3/2}}\quad\text{für}\quad v<v_K-\varepsilon\,,$$
$$L_2=\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{2\,m}{c\,(E\,J)^2}}\,\frac{P^2v_K}{\sqrt{d}}\quad\text{für}\quad v=v_K\,,$$
$$L_3=\frac{P^2v}{m\sqrt{v^4-v_K{}^4}}\qquad\text{für}\quad v>v_K+\varepsilon\,.$$

Im Bereich $v<v_K-\varepsilon$ ist also die durch den Wellenwiderstand hervorgerufene Verlustleistung proportional der Dämpfung d. Bei der kritischen Geschwindigkeit v_K nimmt sie dagegen umgekehrt proportional der Wurzel aus der Dämpfung zu. Bei verschwindender Dämpfung strebt sie gegen Unendlich. Im Bereich $v>v_K+\varepsilon$ tritt bereits ohne Dämpfung eine Verlustleistung auf[1]. Die von der Dämpfung herrührenden Anteile sind von quadratischer oder höherer Ordnung, werden also in unseren Untersuchungen nicht berücksichtigt.

In dem Übergangsbereich $|v-v_K|<\varepsilon$ gehen die drei untersuchten Fälle ineinander über. Die Untersuchung dieses Bereiches ist mathematisch kompliziert, aber zur qualitativen physikalischen Beurteilung nicht erforderlich. In Abb. 2 sind die Kurven $L_1(v)$ und $L_3(v)$ sowie der Punkt L_2 angegeben. Der in dem Übergangsbereich etwa zu erwartende Verlauf ist durch die gestrichelte Kurve angegeben.

[1] *J. Dörr*, a. a. O. S. 191.

Die Dämpfung des Systems hat also zur Folge, daß bei der kritischen Geschwindigkeit die Verlustleistung bzw. der Wellenwiderstand endlich bleibt.

Auch die Amplituden und die Länge der Wellengruppe bei der kritischen Geschwindigkeit v_K bleiben durch das Vorhandensein von Dämpfung endlich und werden um so kleiner, je größer die Dämpfung ist, wie aus (13) hervorgeht. Im Bereich $v < v_K - \varepsilon$ wird das Aussehen der Wellengruppe durch das Vorhandensein von Dämpfung nur unwesentlich verändert, wie die Formeln (18), (19) und (20) zeigen. Im Bereich $v > v_K + \varepsilon$ wirkt sich die Dämpfung dagegen wesentlich

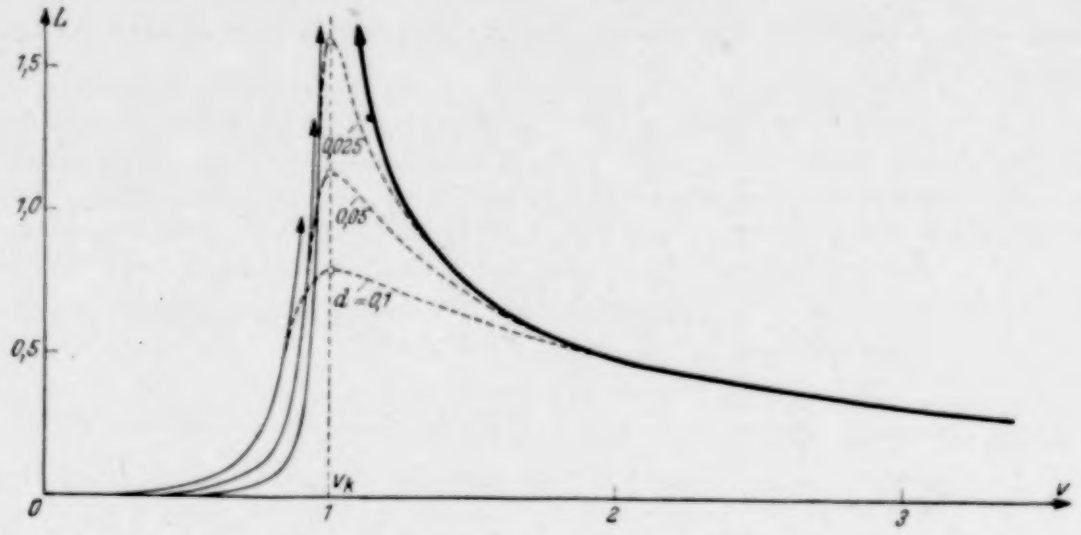

Abb. 2. Die sekundlich von der Störkraft zu leistende Arbeit L bei verschiedenen Dämpfungswerten d. Alle anderen Größen E, J, P, c, m, v_K sind gleich 1 gesetzt.

auf die Form der Wellengruppe aus. Die Amplituden in der Nähe der Störungsstelle $z = 0$ werden zwar nur wenig beeinflußt, aber die Länge der Wellengruppe nimmt exponentiell zu, wenn die Dämpfung gegen Null geht.

In allen drei Fällen besteht die durch die wandernde Last hervorgerufene Auslenkung des Balkens aus einer mit der Störungskraft mitlaufenden Wellengruppe, deren Amplituden nach beiden Seiten exponentiell abklingen. Der vor der Störungsstelle befindliche Wellenteil hat die kleinere Wellenlänge.

5. Anwendung der Laplace-Transformation zur Lösung des Störungsproblems. Es soll hier kurz angedeutet werden, wie sich mit Hilfe der *Laplace*-Transformation die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2) finden läßt, und wie man aus dieser durch den Grenzübergang $t \to \infty$ die bereits angegebenen asymptotischen Lösungen gewinnt. Auf die bei diesen Ausführungen an sich notwendigen, aber leicht zu erbringenden Existenzbeweise und Begründungen der einzelnen Schritte wird dabei nur kurz oder gar nicht eingegangen.

Als Anfangsbedingungen unseres Störungsproblems fordern wir

$$\dot{y}(x,0) = 0\,, \quad y(x,0) = 0\,.$$

Wir setzen die Existenz der *Laplace*-transformierten aller in (2) auftretenden Glieder für $\Re[p] \geqq \sigma$ voraus. Den Wert von σ werden wir später festlegen. Mit

$$\int_0^\infty e^{-p\,v\,t}\, y(x,t)\, dt = g(x,p)$$

findet man dann durch Anwendung der *Laplace*-Transformation auf die partielle Differentialgleichung (2) unter Beachtung der angegebenen Anfangsbedingungen folgende gewöhnliche Differentialgleichung für $g(x,p)$:

$$\frac{d^4 g(x,p)}{dx^4} + (\alpha\, v^2\, p^2 + \beta\, v\, p + \gamma)\, g(x,p) = \begin{cases} e^{-p\,x} & \text{für } x \geqq 0\,, \\ 0 & \text{für } x < 0\,. \end{cases}$$

Das rechts stehende Störungsglied verschwindet für $x < 0$, da wir uns voraussetzungsgemäß die Störungskraft zur Zeit $t = 0$ an der Stelle $x = 0$ aufgesetzt denken.

Da wir es mit einem beiderseits unendlich langen Balken zu tun haben, eignet sich zur Lösung der Differentialgleichung der *Fourier*-Ansatz

$$g(x,p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} h(k)\, dk \ .$$

Außerdem ist

$$e^{-px} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k - ip}\, dk \quad (x \geqq 0, p > 0) \ .$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung für $g(x,p)$ gewinnt man damit eine Gleichung für $h(k)$ und erhält daraus

$$h(k) = \frac{1}{2\pi i (k - ip)(k^4 + \alpha v^2 p^2 + \beta v p + \gamma)} \quad (p > 0) \ .$$

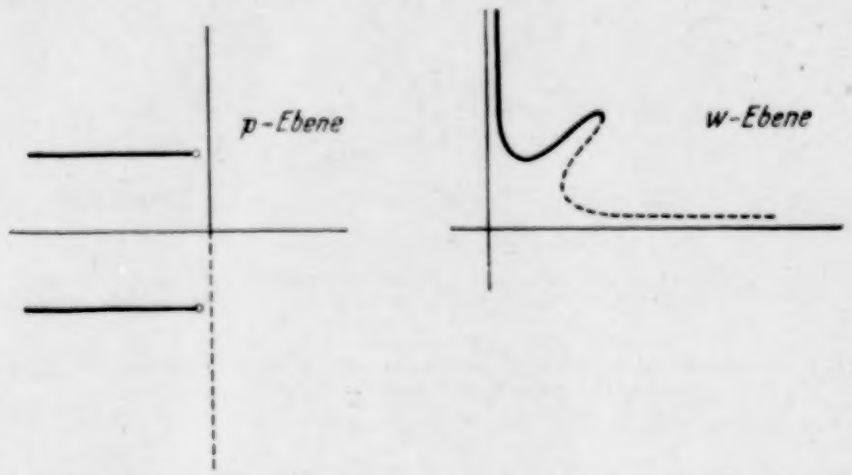

Abb. 3. Abbildung der Halbebene $\Re[p] \geq 0$ auf die w-Ebene $w(p) = \sqrt[4]{-(\alpha p^2 + \beta p + \gamma)}$.

Das setzen wir in die Integraldarstellung von $g(x,p)$ ein:

$$g(x,p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{(k - ip)(k^4 + \alpha v^2 p^2 + \beta v p + \gamma)}\, dk \ , \ (x \geqq 0) \ .$$

Für $x \geqq 0$ ist das rechts stehende Integral gleich der Summe der oberhalb der reellen Achse liegenden Pole des Integranden.

Wir wollen unter

$$w(p) = \sqrt[4]{-(\alpha v^2 p^2 + \beta v p + \gamma)}$$

den Wurzelzweig verstehen, der für $\Re[p] > 0$ im rechten Teil der oberen w-Halbebene liegt. Dann sind $k_1 = w(p)$, $k_2 = i w(p)$ und $k_5 = ip$ die drei einzigen Pole des Integranden von $g(x,p)$, die oberhalb der reellen Achse liegen. Weiterhin sei

$$k_3 = -k_1 \ , \quad k_4 = -k_2 \ .$$

Dann erhält man, wenn man statt $w(p)$ einfach w schreibt,

$$g(x,p) = \frac{e^{-px}}{p^4 + \alpha v^2 p^2 + \beta v p + \gamma} + \frac{e^{iwx}}{(w - ip)\, 4 w^3} - \frac{e^{-wx}}{(w - p)\, 4 w^3} \ .$$

Die Ausdrücke $w(p)$ und $g(x,p)$ haben in der p-Ebene zwei Verzweigungspunkte. Sie bestimmen sich aus

$$w(p) = 0 \text{ zu } p_\nu = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\gamma}{\alpha}} \ .$$

Da alle Faktoren α, β, γ positiv reell sind, liegen die Verzweigungspunkte immer links neben der imaginären Achse. Um Eindeutigkeit zu erzielen, bringen wir von den Verzweigungspunkten zwei in die linke Halbebene hineinlaufende Verzweigungsabschnitte an und legen, wie bereits ausgemacht, den Betrachtungen das Blatt der p-Ebene zugrunde, bei dem sich die Halbebene $\Re[p] > 0$ in die rechte Hälfte der oberen w-Halbebene abbildet wie in Abb. 3. Der erste Summand

von $g(x,p)$ hat vier Pole, und zwar sind es dieselben vier Pole p_1, p_2, p_3, p_4 wie in den Formeln (11) Von dem zweiten und dritten Summanden des Ausdrucks $g(x,p)$ interessieren im folgenden nur die rechts der imaginären Achse liegenden Pole. Die Pole des zweiten Summanden bestimmen sich aus:

$$w(p) - i\,p = 0\,.$$

Eine einfache Untersuchung dieser Gleichung zeigt, daß rechts der imaginären Achse nur ein Pol liegt und, zwar an der Stelle p_4.

Die Pole des dritten Summanden bestimmen sich aus

$$w(p) - p = 0\,.$$

Es zeigt sich, daß rechts der imaginären Achse nur ein Pol liegt, und zwar an der Stelle p_1. Es läßt sich also stets eine Parallele zur imaginären Achse angeben mit der Abszisse $\sigma > 0$, die alle Pole und Verzweigungspunkte von $g(x,p)$ zur Linken läßt. In der Halbebene $\Re_n[p] \geqq \sigma$ ist dann $g(x,p)$ überall regulär analytisch und geht hier für sehr große p-Werte mit einer höheren Potenz als der vierten gegen Null; denn aus Abb. 3 folgt, daß die Exponenten der in $g(x,p)$ auftretenden e-Funktionen in diesem Bereich überall einen negativen Realteil besitzen.

Unter diesen Voraussetzungen wird durch das Integral

$$y(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} g(x,p)\, e^{p\,v\,t}\, dp$$

eine stetige Funktion mit stetigen Ableitungen $y', \ldots y^{IV}$ und $\dot{y}, \ddot{y}$ dargestellt. Nur an der Störstelle $x - v\,t = 0$ sind y^{III} und y^{IV} unstetig. Diese Funktion ist die Lösung des Störungsproblems.

Wir spalten das Integral in folgende drei Bestandteile auf:

$$y_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} \frac{e^{-p\,(x-v\,t)}}{p^4\,\alpha\,v^2\,p^2 + \beta\,v\,p + \gamma}\, dp\,,$$

$$y_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} \frac{e^{i\,w\,x + p\,v\,t}}{(w - i\,p)\,4\,w^3}\, dp\,,$$

$$y_3 = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} \frac{e^{-w\,x + p\,v\,t}}{(w - p)\,4\,w^3}\, dp$$

mit $$w = \sqrt[4]{-(\alpha\,v^2\,p^2 + \beta\,v\,p + \gamma)}\,.$$

Der Ausdruck y_1 ist mit Ausnahme des Integrationsweges identisch mit dem Integral (8), da $x - v\,t = z$ ist. Die Ausdrücke y_2 und y_3 haben einen schwierigeren Aufbau. Eine allgemeine Berechnung konnte nicht angegeben werden. Für den Grenzfall $t \to \infty$ läßt sich aber zeigen, daß y_2 und y_3 gleich der Summe der rechts der imaginären Achse liegenden Residuen sind. Aus Abb. 3 sieht man nämlich, daß $i\,w(p)$ und $-w(p)$ auf der imaginären Achse überall regulär analytisch sind und hier nirgends einen positiven Realteil besitzen. Die Integranden von y_2 und y_3 sind dann auf der imaginären Achse überall regulär analytisch und gehen hier für große p-Werte mit der vierten Potenz oder noch stärker gegen Null. Man findet deshalb durch partielle Integration

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{i\,w\,x + p\,v\,t}}{(w - i\,p)\,w^3}\, dp = \frac{1}{v\,t} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{p\,v\,t}\, \frac{d}{dp}\left[\frac{e^{i\,w\,x}}{(w - i\,p)\,w^3}\right] dp\,.$$

Das rechts stehende Integral existiert; daraus folgt, daß der Ausdruck für große t-Werte mindestens wie $O(1/t)$ gegen Null strebt. Daraus folgt weiterhin, daß y_2 für $t \to \infty$ gleich der Summe der Residuen der rechts der imaginären Achse liegenden Pole ist. Für y_3 findet man mit demselben Verfahren das gleiche Ergebnis. Der Integrand von y_2 hat nur den Pol p_4 und der Integrand von y_3 nur den Pol p_1 rechts der imaginären Achse. Die Residuen um diese beiden Pole sind nun aber gleich den negativen Residuen des Integranden von y_1 um die beiden Pole p_1

und p_4. Man sieht das leicht, wenn man den Integranden von y_2 mit $(w+ip)(w^2-p^2)$ und den von y_3 mit $(w+p)(w^2+p^2)$ erweitert und dabei die aus dem Vorhergehenden folgenden Beziehungen $w(p_1)=p_1$ und $w(p_4)=ip_4$ beachtet. Der Ausdruck y_1 ist nun aber im Falle $x-vt>0$ gleich Null, im Falle $x-vt<0$ gleich der Summe der Residuen der vier Pole p_1, p_2, p_3, p_4. Wegen

$$Y(z)=\lim_{t\to\infty}(y_1+y_2+y_3) \text{ mit } z=x-vt$$

folgt daraus, daß für $z<0$ die asymptotische Lösung $Y(z)$ gleich der Summe der Residuen des Integranden von y_1 um die beiden Pole p_2 und p_3 und im Falle $z>0$ gleich der Summe der negativen Residuen um die Pole p_1 und p_4 ist. Für $Y(z)$ ist damit auf einem umständlicheren Wege, der allerdings in dieser sehr gekürzten Rechnung nicht richtig zum Ausdruck kommt, dasselbe Ergebnis gefunden wie in Formel (8).

6. Zusammenfassung. Für den mit Dämpfung behafteten, unendlich langen, federnd gebetteten Balken wurden die Auslenkungen ermittelt, die von einer mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Last erzeugt werden. Der sich nach sehr langer Zeit einstellende Schwingungszustand wurde mittels eines einfachen direkten Verfahrens bestimmt, außerdem aber ein umständlicheres Verfahren kurz skizziert, bei dem diese asymptotische Lösung des Problems in der üblichen Weise durch den Grenzübergang $t\to\infty$ ermittelt wurde. Die asymptotische Lösung stellt einen stationären, mit der Störungslast mitlaufenden Wellenzug dar, der nach beiden Seiten exponentiell mit dem Abstand von der Störungsstelle abklingt. Bei einer gewissen kritischen Geschwindigkeit $v=v_K$ sind die Amplituden und die Länge der Wellengruppe besonders groß und gehen gegen ∞, wenn die Dämpfung des Systems gegen „Null" geht. Unterhalb der kritischen Geschwindigkeit ist die von der Störungskraft zu leistende Arbeit proportional der Dämpfung d, geht also mit $d\to 0$ ebenfalls gegen Null. Ein Stück oberhalb der kritischen Geschwindigkeit muß dagegen die Störungskraft auch bei Dämpfungsfreiheit bereits Arbeit leisten. Bei Hinzunahme von Dämpfungskräften ändert sich diese Verlustarbeit nur quadratisch mit d, darf also bei sehr kleinem d vernachlässigt werden. Bei der kritischen Geschwindigkeit $v=v_K$ ist die Verlustarbeit durch Dämpfungskräfte besonders groß und geht für $d\to 0$ umgekehrt mit der Wurzel aus d gegen Unendlich. Diese Ergebnisse finden eine gewisse Analogie bei der Fortbewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. Unterhalb der Schallgeschwindigkeit ist die Antriebsarbeit nur von den Reibungskräften abhängig und ist Null in einer reibungsfreien idealen Flüssigkeit. Oberhalb der Schallgeschwindigkeit ist hingegen auch bei reibungsfreier idealer Flüssigkeit eine Antriebsarbeit erforderlich wegen vom Körper verursachter Wellenabstrahlung. Bei der Schallgeschwindigkeit selbst ist die Energieabstrahlung besonders groß.

(Eingegangen am 30 Juni 1947.)

Eine ebene Potentialströmung in der Umgebung der Schallgeschwindigkeit.

Von **F. Reutter** in Karlsruhe.

1. Im folgenden soll die adiabatische, kompressible, reibungslose und wirbelfreie ebene Gasströmung, insbesondere in einer gewissen Umgebung der kritischen Schallgeschwindigkeit, untersucht werden. Das eingeschlagene Verfahren steht zwischen der in der Gasdynamik bekannten[1] linearisierten und der strengen Theorie. Im Gegensatz zur linearisierten Theorie sind hier die Charakteristiken im Überschallbereich sowohl in der Strömungs- als auch in der Hodographenebene keine Geraden mehr. Auf die physikalischen Folgerungen, die Untersuchung des Verdichtungsstoßes und andere Fragen soll hier nicht eingegangen werden; wir werden uns hier auf die mathematische Diskussion beschränken. Die numerische Behandlung einiger Beispiele soll in einer späteren Mitteilung folgen. Die zugrundegelegte Differentialgleichung ist besonders zur Untersuchung des Durchganges durch die Schallgeschwindigkeit geeignet. Es werden die theoretischen Grundlagen angegeben, um zu einem vorgegebenen Profil in der Strömungsebene Potentialfunktion und Geschwindigkeitsverteilung zu bestimmen.

2. Die zu untersuchende Strömung soll nicht allzusehr von einer ungestörten Parallelströmung abweichen. Deren Richtung sei die x-Richtung eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems. Der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w}$ der gestörten Strömung ist

$$\mathfrak{w} = u(x,y)\,\mathfrak{i} + v(x,y)\,\mathfrak{j} = (u_a + u_1(x,y))\,\mathfrak{i} + v(x,y)\,\mathfrak{j}\,,$$

und es gelte die Bedingung

$$\left|\frac{v}{u}\right| \ll 1\,.$$

Die Stromdichte ϱw wird durch Division mit $\varrho_0 w_\infty$ (ϱ_0 = Dichte im Ruhezustand, w_∞ = maximale Strömungsgeschwindigkeit) dimensionslos gemacht. Bezeichnet noch c^* die kritische Schallgeschwindigkeit, so kann $\Theta\left(\frac{w}{w_\infty}\right) = \frac{\varrho\, w}{\varrho_0\, w_\infty}$ ohne die sonst in der linearisierten Theorie weiter gemachte Annahme $u_1{}^2 \ll u^2$ für $0{,}5 \leqq \frac{u}{c^*} \leqq 1{,}5$ in recht guter (für $0{,}75 \leqq \frac{u}{c^*} \leqq 1{,}25$ sogar in sehr guter) Annäherung durch

$$\Theta\left(\frac{w}{w_\infty}\right) = \Theta_0 + \Theta_2\left(\frac{c^* - u}{w_\infty}\right)^2 \tag{1}$$

ersetzt werden[2]. Dabei ist

$$\Theta_0 = \Theta\left(\frac{c^*}{w_\infty}\right), \qquad \Theta_2 = -\frac{4}{\sqrt{\varkappa^2 - 1}}\left(\frac{2}{\varkappa - 1}\right)^{\frac{3-2\varkappa}{\varkappa-1}},$$

$\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ = Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck bzw. Volumen.

Mit

$$\frac{c^*}{\bar{u}_a} = -\frac{2\Theta_2}{\left(1 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} M_a^2\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}}\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\,,$$

$M_a = \frac{u_a}{c^*}$ = *Mach*sche Zahl der Parallelströmung und den Substitutionen

$$U = \frac{u - c^*}{\bar{u}_a}, \qquad V = \frac{v}{\bar{u}_a} \tag{2}$$

ergeben die Bedingungen der Quellen- und Wirbelfreiheit die Differentialgleichungen

$$-U\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0\,. \tag{3}$$

Mit $U = \Phi_x$, $V = \Phi_y$ erhält man für das Potential $\Phi(x,y)$ die quasilineare partielle Differentialgleichung[3]

$$-\Phi_x \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0\,. \tag{4}$$

---

[1] S. z. B. *R. Sauer*, Gasdynamik. Berlin 1943.

[2] Auf Grund einer mündlichen Mitteilung von Herrn *Klaus Oswatitsch*.

[3] Die Gl. (4) ist wahrscheinlich schon früher (u. a. von *Riabouchinski*) angegeben worden, doch stand Literatur darüber nicht zur Verfügung.

3. Die unmittelbare Behandlung der Strömung in der (x,y)-Ebene mit Hilfe der Differentialgleichung (4) stößt auf erhebliche Schwierigkeiten. Ihre Ursache ist die Nichtlinearität von (4), die eine Überlagerung von z. B. durch Separation leicht zu gewinnenden Partikularlösungen nicht gestattet und daher entweder nur Profilformen erlaubt, die durch eine einzige Partikulärlösung mit festen Konstanten bestimmt sind oder zur Zerlegung des Strömungsbereiches in mehrere Teilbereiche mit abschnittsweise veränderlichen Konstanten zwingt. Das letztere ist aber nur im Überschallbereich zulässig, und die auf dem ersteren Weg zu gewinnenden Profilformen haben wenig praktische Bedeutung.

Daher ist die Linearisierung von (4) unbedingt erforderlich. Der einzige Weg hierzu wird durch die Legendretransformation geboten, da die Mollenbroektransformation hier auf eine wesentlich kompliziertere Gleichung führt.

4. Mit $U=U(x,y)$, $V=V(x,y)$ als neuen unabhängigen Veränderlichen wird das System (3)

$$-U\frac{\partial y}{\partial V}+\frac{\partial x}{\partial U}=0, \qquad \frac{\partial x}{\partial V}-\frac{\partial y}{\partial U}=0$$

oder mit

$$x=\varphi_U\,, \quad y=\varphi_V \tag{5}$$

einfacher

$$-U\varphi_{VV}+\varphi_{UU}=0\,. \tag{6}$$

Damit ist eine lineare Differentialgleichung für das konjugierte Potential $\varphi(U,V)$ gewonnen. Die zugeordnete Gleichung für die Stromfunktion geben wir nicht an, da sie nicht behandelt werden kann.

Wir ermitteln partikuläre Integrale der Gleichung (6) zunächst durch den Ansatz

$$\varphi(U,V)=R(U)\,S(V)\,.$$

Dann ergeben sich für $R(U)$ und $S(V)$ die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$R''(U)-\lambda U R(U)=0\,, \tag{6*}$$

$$S''(V)-\lambda S(V)=0\,. \tag{6**}$$

Das allgemeine Integral von (6*) kann mit Hilfe von allgemeinen Zylinderfunktionen der Argumente $U^{3/2}$ und $iU^{3/2}$ dargestellt werden. Es wird jedoch zweckmäßig direkt in Form einer Potenzreihe bestimmt. Der Ansatz $R(U)=\gamma_0+\gamma_1U+\gamma_2U^2+\gamma_3U^3+\dots$ liefert

$$\gamma_2^{(\lambda)}=\gamma_5^{(\lambda)}=\gamma_8^{(\lambda)}=\cdots=\gamma_{2+3\nu}^{(\lambda)}=0\,,$$

$$\gamma_3^{(\lambda)}=\frac{\lambda\gamma_0^{(\lambda)}}{3\cdot 2}\,, \quad \gamma_6^{(\lambda)}=\frac{\lambda\gamma_3^{(\lambda)}}{6\cdot 5}\,, \quad \gamma_9^{(\lambda)}=\frac{\lambda\gamma_6^{(\lambda)}}{9\cdot 8}\,,\dots,$$

$$\gamma_4^{(\lambda)}=\frac{\lambda\gamma_1^{(\lambda)}}{4\cdot 3}\,, \quad \gamma_7^{(\lambda)}=\frac{\lambda\gamma_4^{(\lambda)}}{7\cdot 6}\,, \quad \gamma_{10}^{(\lambda)}=\frac{\lambda\gamma_7^{(\lambda)}}{10\cdot 9}\,,\dots,$$

$$\gamma_k^{(\lambda)}=\frac{\lambda\gamma_{k-3}^{(\lambda)}}{k\,(k-1)}\,.$$

Dabei ist

$$\varrho^3=\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_{3n}^{(\lambda)}}{\gamma_{3n+3}^{(\lambda)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+3)(3n+2)}{\lambda}=\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_{3n+1}^{(\lambda)}}{\gamma_{3n+4}^{(\lambda)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)(3n+3)}{\lambda}=\infty\,.$$

Die Reihe für $R(U)$ ist also in U und λ beständig konvergent. Wir schreiben mit $\gamma_0^{(\lambda)}=\alpha_\lambda$, $\gamma_1^{(\lambda)}=\beta_\lambda$ und

$$\left.\begin{aligned} P_\lambda(U)&=\left(1+\frac{\lambda}{3\cdot 2}U^3+\frac{\lambda^2}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}U^6+\frac{\lambda^3}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}U^9+\cdots\right),\\ Q_\lambda(U)&=\left(1+\frac{\lambda}{4\cdot 3}U^3+\frac{\lambda^2}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}U^6+\frac{\lambda^3}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}U^9+\cdots\right)U,\\ R_\lambda(U)&=\alpha_\lambda P_\lambda(U)+\beta_\lambda Q_\lambda(U)\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Daher läßt sich eine einzelne Partikulärlösung von (6) in der Form

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_\lambda(U,V)=\left(\alpha_\lambda P_\lambda(U)+\beta_\lambda Q_\lambda(U)\right)\left(A_\lambda\,\mathfrak{Cof}\sqrt{\lambda}V+B_\lambda\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\lambda}V\right)\\ \text{oder}\quad &\varphi_\lambda(U,V)=\Gamma_\lambda\left(\alpha_\lambda P_\lambda(U)+\beta_\lambda Q_\lambda(U)\right)\mathfrak{Cof}\left(\sqrt{\lambda}V-\varepsilon\right) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ansetzen.

Da die Separationskonstante λ zunächst alle positiven und negativen[1] reellen Zahlen durchlaufen darf, erhält man durch Superposition folgende allgemeinste Lösung:

$$\varphi(U,V)=\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{Cof}\left(\sqrt{\lambda}\,V-\varepsilon\right)\left(\alpha(\lambda)\,P_\lambda(U)+\beta(\lambda)\,Q_\lambda(U)\right)d\lambda\,. \tag{9}$$

Die Funktionen $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ sind gemäß den Randbedingungen zu bestimmen.
Aus den Randbedingungen kann man zusammen mit der Bedingung im Unendlichen ein System von simultanen Integralgleichungen erster Art für die Funktionen $\alpha(\lambda)$ und $\beta(\lambda)$ gewinnen. Im allgemeinen wird das Integral (9) durch eine Summe mit noch anzugebenden λ-Intervallen angenähert. Dabei können statt der Funktionen $\mathfrak{Cof}\sqrt{\lambda}\,V$ bzw. $\mathfrak{Sin}\sqrt{\lambda}\,V$ auch $\cos\sqrt{\lambda}\,V$ bzw. $\sin\sqrt{\lambda}\,V$ auftreten. Doch wird hierauf im folgenden nicht mehr besonders hingewiesen.

5. Es liegt nahe, zunächst die durch eine einzelne Partikulärlösung $\varphi_\lambda(U,V)$ bei festem λ und gegebenem α_λ, β_λ, ε dargestellte Strömung zu untersuchen.

Schreibt man die Potentialfunktion (8) mit $\Gamma_\lambda=1$ in der Form

$$\varphi_\lambda(U,V)=R_\lambda(U)\,\mathfrak{Cof}\left(\sqrt{\lambda}V-\varepsilon\right), \tag{8}$$

so lassen sich die Äquipotentiallinien aus der Gleichung $\varphi_\lambda(U,V)=c$ bestimmen. Es ist

$$V=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{c}{R_\lambda(U)}+\varepsilon\right). \tag{9}$$

Daraus ergibt sich für die Äquipotentiallinien die Parameterdarstellung

$$\left.\begin{aligned} x(U)&=c\,\frac{R_\lambda'(U)}{R_\lambda(U)}\,,\\ y(U)&=\sqrt{\lambda}\sqrt{c^2-R_\lambda^2(U)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Für die Parameterdarstellung der Stromlinien $\xi=\xi(U)$, $\eta=\eta(U)$ erhält man die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dU}&=\sqrt{\lambda}\,\frac{R_\lambda'^{\,2}(U)}{\sqrt{R_\lambda'^{\,2}(U)-\xi^2}}\,,\\ \frac{d\eta}{dU}&=\sqrt{R_\lambda^2(U)-\frac{\eta^2}{\lambda}}\;\frac{R_\lambda R_\lambda''-R_\lambda'^{\,2}}{R_\lambda^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Bei jeder durch (10) und (11) beschriebenen Strömung sind, da $P_\lambda(U)$ und $Q_\lambda(U)$ ganze Funktionen sind, wegen (5) endlichen Punkten der (U,V)-Ebene nur endliche Punkte der Strömungsebene zugeordnet.

6. Die Strömung um ein nichtangestelltes[2] Profil oder durch eine Düse erfolgt i. a. symmetrisch zur Symmetrieachse der Düse bzw. des Profils. Als solche wählen wir die x-Achse. Die Koordinaten der Punkte des Strömungsbereiches sind gemäß (5)

$$\left.\begin{aligned} x&=\left(\alpha_\lambda P_\lambda'(U)+\beta_\lambda Q_\lambda'(U)\right)\left(A_\lambda\,\mathfrak{Cof}\sqrt{\lambda}\,V+B_\lambda\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\lambda}\,V\right),\\ y&=\sqrt{\lambda}\left(\alpha_\lambda P_\lambda(U)+\beta_\lambda Q_\lambda(U)\right)\left(A_\lambda\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\lambda}V+B_\lambda\,\mathfrak{Cof}\sqrt{\lambda}\,V\right). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Nun soll bei beliebigem U für $y=0$ auch $V=0$ sein. Diese Bedingung ist zunächst nur erfüllbar, wenn $B_\lambda=0$. Dann wird mit $A_\lambda=1$

$$\varphi_\lambda(U,V)=\left(\alpha_\lambda P_\lambda(U)+\beta_\lambda Q_\lambda(U)\right)\mathfrak{Cof}\sqrt{\lambda}\,V. \tag{13}$$

Andererseits ist dann für $V=0$ ein von Null verschiedener y-Wert überhaupt nicht mehr möglich. Daher können auch durch Überlagerung von unendlich vielen Partikulärlösungen der Form (13) Profile mit horizontaler Tangente nicht behandelt werden. Da außerdem die gemäß (12) gebildeten Reihen für x und y für alle Werte von U und $|V|\ll|U|$ konvergent sind, bereitet auch die Erfüllung der Randbedingung im Unendlichen einige Schwierigkeiten.

---

[1] Im letzteren Falle wird mit $\sqrt{\lambda}=i\mu$, $\lambda^2=-\mu^2$, $\mu>0$: $\mathfrak{Cof}\sqrt{\lambda}\,V=\cos\sqrt{\mu}\,V$, $\mathfrak{Sin}\sqrt{\lambda}\,V=i\sin\sqrt{\mu}\,V$.

[2] Die folgenden Überlegungen lassen sich auch auf angestellte Profile ausdehnen.

7. Man könnte nun versuchen, durch Auswahl einer geeigneten Folge λ_ν von λ-Werten zu erreichen, daß $\varphi(U, V) = \sum_\nu \varphi_{\lambda_\nu}(U, V)$ im Falle $V = 0$ nur für $|U| < |U_a|$ mit $U_a = (u_a - c^*)/\bar{u}_a$ konvergiert. Eine Singularität der Potentialfunktion für $U \longrightarrow U_a$ und $V = 0$ läßt sich jedoch besonders einfach erreichen, indem man ein in (13) nicht enthaltenes Partikulärintegral der Differentialgleichung (6) als Doppelreihe ansetzt, die im Falle $V = 0$ nur für $|U| < |U_a|$ konvergiert. Die einfachste Form einer solchen Reihe ergibt sich ohne willkürliche Konstanten zu

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varphi}(U, V) &= \sum_{n,m} a_{3n,2m}\, U^{3n}\, V^{2m} \\ \text{mit } a_{00} &= 0,\ a_{3n,0} = \frac{1}{|U_a|^{3n}},\ a_{3n,2m} = \frac{(3n+3)(3n+2)}{2m(2m-1)}\, a_{3n+3,2m-2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Wählt man nun für λ die positiven ganzen Zahlen $\lambda_\nu = \nu$ (einschließlich der Null) und setzt

$$\varphi_{\lambda_\nu} = \varphi_\nu(U, V),\quad P_{\lambda_\nu}(U) = P_\nu(U),\quad Q_{\lambda_\nu}(U) = Q_\nu(U),$$

so erhält man für die gesamte Potentialfunktion

$$\varphi(U, V) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\alpha_\nu P_\nu(U) + \beta_\nu Q_\nu(U)\right] \mathfrak{Cof} \sqrt{\lambda_\nu}\, V + \bar{\varphi}(U, V). \tag{14*}$$

Hierin sind noch die α_ν, β_ν durch die Profilbedingung (Abschnitt 8) zu bestimmen.

Statt aus den Partikulärlösungen (13) aufzubauen, kann man auch den ersten Anteil der Potentialfunktion als Doppelreihe mit unbestimmten Koeffizienten in der Form

$$\varphi_1(U, V) = \sum_{k,l} c_{kl}\, U^k\, V^l \quad \text{mit} \quad c_{kl} = \frac{(k+3)(k+2)}{l(l-1)}\, c_{k+3,l-2}$$

ansetzen und die frei verfügbaren Koeffizienten c_{k0} und c_{k1} mit Hilfe der Profilbedingung bestimmen. Schließlich kann auch in (14*) vor $\bar{\varphi}(U, V)$ noch eine Konstante γ gesetzt oder es können weitere Konstanten in $\bar{\varphi}(U, V)$ von Null verschieden gewählt und statt dessen eine kleinere Anzahl von Konstanten α_ν, β_ν in die Profilbedingung eingeführt werden. Mit Rücksicht auf diese verschiedenen möglichen Formen von $\bar{\varphi}$ wird die Profilbedingung in Nr. 8 zunächst für eine Strömung ohne Singularität aufgestellt. Im allgemeinen Falle sind noch die aus dem Gliede $\bar{\varphi}(U, V)$ in (14*) sich ergebenden Glieder in den Gleichungen (18a bis c) hinzuzufügen.

Es ist zwar nicht nachgewiesen, daß die durch $\bar{\varphi}$ eingeführte Singularität in dem der Anströmgeschwindigkeit entsprechenden Punkte $(U_a, 0)$ der (U, V)-Ebene den gewünschten Charakter (Dipol) zeigt. Im folgenden werden aber einfach Strömungen behandelt, die die durch diese Wahl von $\bar{\varphi}$ definierte Singularität besitzen. Es besteht zudem unter Umständen die Möglichkeit, durch eine geeignete Transformation der Differentialgleichung (6) weitere Partikulärintegrale mit anderen Singularitäten zu erhalten.

8. Zur Behandlung einer Profilströmung ist längs der Kontur des Profils $y = f(x)$ das Verhältnis $\frac{v}{u} = f'(x)$ zu setzen. Wegen $u = U\bar{u}_a + c^*$, $v = V\bar{u}_a$ lautet die Profilbedingung in U, V

$$\frac{v}{u} = \frac{V\,\bar{u}_a}{U\,\bar{u}_a + c^*} = \frac{dy}{dx}. \tag{15}$$

Andererseits ist wegen (5)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi_{UV} + \varphi_{VV}\frac{dV}{dU}}{\varphi_{UU} + \varphi_{UV}\frac{dV}{dU}}.$$

Daher ergibt sich mit $dy/dx = m$, $dV/dU = \bar{m}$ (wobei zunächst, da $\bar{m}$ nicht ohne weiteres bestimmt werden kann, unter Vernachlässigung der Glieder mit dm/dU für die numerische Rechnung $\bar{m} \sim m$ zu setzen ist) als Profilbedingung

$$m = \frac{\varphi_{UV} + \varphi_{VV}\,\bar{m}}{\varphi_{UU} + \varphi_{UV}\,\bar{m}}. \tag{16}$$

Diese Gleichung gilt längs der ganzen Kontur. In den Punkten $P(x, y)$ des Profils $y = f(x)$ müssen also die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_U(U, V), \\ y &= \varphi_V(U, V) \\ \varphi_{UV}(m\,\bar{m} - 1) &+ (U\,m - \bar{m})\,\varphi_{VV} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

zusammen erfüllt sein. So ergibt sich die Behandlung eines Profils ohne horizontale Tangente in folgender Weise:

Auf der Kontur des Profils wird eine Anzahl von n Punkten $P_\mu(x_\mu, y_\mu)$ herausgegriffen, in denen auf Grund von (17) die folgenden Bedingungen zu erfüllen sind:

$$x_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\alpha_\nu P_\nu'(U_\mu) + \beta_\nu Q_\nu'(U_\mu)\right) \mathfrak{Cof} \sqrt{\lambda_\nu}\, V_\mu\,, \tag{18a}$$

$$y_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\alpha_\nu P_\nu(U_\mu) + \beta_\nu Q_\nu(U_\mu)\right) \sqrt{\lambda_\nu}\, \mathfrak{Sin} \sqrt{\lambda_\nu}\, V_\mu\,, \tag{18b}$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

$$(m_\mu \bar{m}_\mu - 1) \sum_{\nu=1}^{n} \left(\alpha_\nu P_\nu'(U_\mu) + \beta_\nu Q_\nu'(U_\mu)\right) \sqrt{\lambda_\nu}\, \mathfrak{Sin} \sqrt{\lambda_\nu}\, V_\mu + \\ - (\bar{m}_\mu - U m_\mu) \sum_{\nu=1}^{n} \left(\alpha_\nu P_\nu(U_\mu) + \beta_\nu Q_\nu(U_\mu)\right) \mathfrak{Cof} \sqrt{\lambda_\nu}\, V_\mu = 0\,. \tag{18c}$$

Dabei ist noch zu setzen $V_\mu = m_\mu \left(U_\mu + \frac{c^*}{\bar{u}_a}\right)$. Dies ist ein System von $3n$ Gleichungen für die $2n$ linear auftretenden Unbekannten α_ν, β_ν, während die n Unbekannten U_μ in $P_\nu(U_\mu)$, $Q_\nu(U_\mu)$ und gegebenenfalls $\bar{\varphi}(U, V)$ – s. Nr. 7 – transzendent vorkommen. Denkt man sich die $2n$ linearen Gleichungen (18a, b) nach α_ν, β_ν aufgelöst und die erhaltenen Werte in (18c) eingesetzt, so ergibt sich ein System von n Gleichungen für die U_μ, die theoretisch transzendent sind, praktisch als algebraische Gleichungen höheren Grades behandelt werden können. Wir denken sie iterativ gelöst, indem wir sie in bekannter Weise auf ein System von linearen Gleichungen für die jeweiligen Verbesserungen ΔU_μ zurückführen.

Die Geschwindigkeiten U_μ in den einzelnen Profilpunkten genügen nach Elimination der α_ν, β_ν einer Beziehung $D(U_1, U_2, \ldots) = 0$. Multipliziert man die einzelnen Gleichungen (18a) mit dem zugehörigen y_μ, die entsprechenden Gleichungen (18b) mit x_μ und subtrahiert sie voneinander, so erhält man ein System von n linearen homogenen Gleichungen für die $2n$ Unbekannten α_ν, β_ν und daher zusammen mit den Gleichungen (18c) gerade $2n$ lineare homogene Gleichungen für die $2n$ Unbekannten α_ν, β_ν. Die Determinante dieses Systems sei $D(U_1, U_2, \ldots)$. Die n Werte U_μ erfüllen daher die Gleichung $D(U_1, U_2, \ldots) = 0$.

Beim Arbeiten mit den Gleichungen (18) ist zu beachten, daß auf Grund von (7)

$$P_\lambda(U) = P_1\left(\sqrt[3]{\lambda}\, U\right), \quad Q_\lambda(U) = \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}\, Q_1\left(\sqrt[3]{\lambda}\, U\right)$$

wird. Mit $\lambda = \sigma^3$ gilt auch

$$P_\lambda(U) = P_{\sigma^3}(\sigma U)\,, \quad Q_\lambda(U) = \frac{1}{\sigma}\, Q_{\sigma^3}(\sigma U)\,,$$

$$P_\lambda'(U) = \sigma P_{\sigma^3}'(\sigma U), \quad Q_\lambda'(U) = Q_{\sigma^3}'(\sigma U)\,.$$

Es empfiehlt sich daher, für die Rechnungen ein für alle Male die Funktionen $P_1(t)$, $Q_1(t)$ – $t = \sigma U$ – samt ihren ersten Ableitungen zu tabellieren. Sie sind in Abb. 1 dargestellt.

Nach Bestimmung der Konstanten α_ν, β_ν liefert

$$\left(\varphi_{UV} + \varphi_{VV} \frac{dV}{dU}\right)\left(U + \frac{c^*}{\bar{u}_a}\right) - \left(\varphi_{UU} + \varphi_{UV} \frac{dV}{dU}\right) V = 0 \tag{19}$$

die Differentialgleichung der Stromlinien in der (U,V)-Ebene. Durch Einsetzen ihres Integrals $V = V(U,c)$ in (18a, b) hat man die Parameterdarstellung der Stromlinien. Man integriert (19) eventuell graphisch, zeichnet die Integralkurven auf und nimmt die Übertragung der Stromlinien in die (x,y)-Ebene gemäß (18a, b) numerisch vor. Einfacher ist es, die Äquipotentiallinien aufzuzeichnen und die Stromlinien als ihre Orthogonaltrajektorien zu konstruieren.

Die praktische Auflösung des Systems (18) stößt auf große rechnerische Schwierigkeiten, führt aber bei Verwendung einer zu geringen Anzahl von Profilpunkten zu ziemlich ungenauen Resultaten. Es erscheint daher zweckmäßiger, mit einer größeren Anzahl von Profilpunkten zu arbeiten und zu vorgegebenen Werten von m_μ, U_μ und α_ν oder β_ν die Größen x_μ, y_μ und β_ν oder α_ν aus einem linearen Gleichungssystem zu bestimmen. Dann können nach (15) die Werte von $\bar{m}$ zum Einsetzen in (18c) auch ohne Vernachlässigung des Gliedes mit dm/dU ermittelt

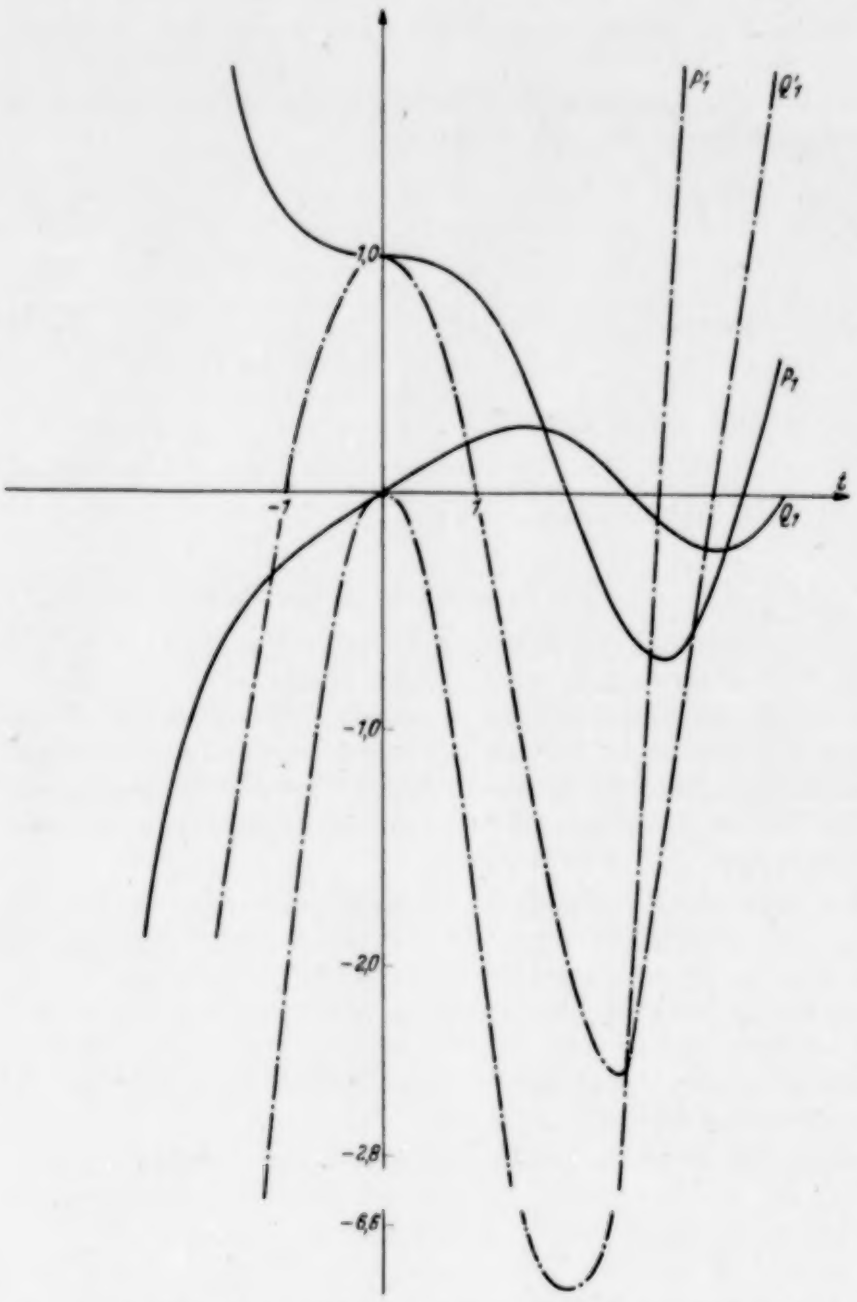

Abb. 1. Verlauf der Funktionen $P_1(t)$, $Q_1(t)$ und ihrer ersten Ableitungen.

werden. Freilich ist man jetzt zum Teil wieder auf den Weg des Probierens zur Erzielung brauchbarer Profilformen angewiesen. Ausgehend von der direkten Behandlung des Systems (18) für nur 3 bis 4 Profilpunkte kann man dann die gewonnenen U_μ-Werte als Anhaltspunkte für eine solche umgekehrte Behandlung benutzen. Oder man kann auch direkt vorgehen, indem man (unter Beibehaltung der U_μ-Werte) immer wieder je einen neuen Punkt $P_\mu\,(x_\mu, y_\mu)$ zu den 3 bis 4 Ausgangspunkten hinzunimmt, ein weiteres Glied φ_ν mit zugehörigem λ_ν der Potentialfunktion anfügt und sein $\alpha_\nu, \beta_\nu, U_\mu$ bestimmt. Das gegebene Profil erfährt jetzt schrittweise gewisse Abänderungen, da die gemäß (18a, b) berechneten x- und y-Werte durch die Zusatzglieder φ_ν der Potentialfunktion Korrekturen erleiden. Die Stelle des Durchgangs durch die Schallgeschwindigkeit ergibt sich, indem man die zu $U=0$ gehörigen Werte x und y aus (5) berechnet, und man erhält auch eine Parameterdarstellung der zu $u^2+v^2=c^{*2}$ gehörigen Isotache, die für Düsenströmungen von großem Interesse ist.

9. Schließlich mögen noch zwei Wege angedeutet werden, um sich von der Beschränkung auf Berandungen mit nichthorizontaler Tangente freizumachen. Allerdings kann wegen der jetzt auftretenden Verzweigungsstellen der Potentialfunktion in der (U,V)-Ebene Anlaß zu Singularitäten bestehen, die wir hier nicht diskutieren können.

Einmal kann man versuchen, die Potentialfunktion in der Form

$$\varphi(U,V)=\sum_\nu \left(\alpha_\nu P_\nu(U)+\beta_\nu Q_\nu(U)\right)\left(\sqrt{\lambda_\nu}\,\mathfrak{Cof}\sqrt{\lambda_\nu}\,(V-\varepsilon)+\sqrt{\lambda_\nu}\,\mathfrak{Cof}\sqrt{\lambda_\nu}\,(V+\varepsilon)\right) \tag{20}$$

anzusetzen, wo der zweite Faktor jetzt für $V=+\varepsilon$ und $V=-\varepsilon$ Verzweigungsstellen besitzen soll, d. h. eigentlich in der Form $\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\sqrt{\lambda_\nu}\,(V\mp\varepsilon)^2}$ zu schreiben wäre. An den Verzweigungsstellen tritt ein Umschlag der Vorzeichen ein, so daß eine Partikulärlösung $\varphi_\nu(U,V)$ drei Zweige mit etwa folgender Vorzeichenkombination in den beiden Gliedern der zweiten Klammer in (20) besitzt:

$y<0$	$+\ -$	
$y=0$	$+\ +$	Umschlag bei $V=-\varepsilon$,
$y>0$	$-\ +$	Umschlag bei $V=+\varepsilon$.

Bezüglich der Konstantenbestimmung sei hier nur angedeutet, daß jetzt auch ε an Stelle eines Paares α_ν, β_ν durch die Randbedingungen festzulegen ist, und daß die den Verzweigungsgeraden $V=\pm\varepsilon$ entsprechenden singulären Punkte der Strömungsebene i. a. ins Profilinnere fallen.

Durch den Ansatz (20) verzichten wir allerdings auf die gewöhnlich geltende Voraussetzung[1] umkehrbar eindeutiger Zuordnung zwischen Strömungs- und Hodographenebene, die freilich in anderer Art auch bei der Parallelströmung und der Strömung um konvexe Ecken nicht mehr erfüllt ist. Die Möglichkeit des Auftretens von Verzweigungsstellen in der Hodographenebene und einer mehrfachen Überdeckung der Strömungsebene an sich ist (von den Grenzlinien der adiabatischen Strömung her) in anderem Zusammenhang bekannt[2]. Dasselbe gilt auch von dem in Abschnitt **10** noch angedeuteten Verfahren.

10. Außer den durch Separation der Differentialgleichung (6) gewonnenen Partikulärlösungen kann man noch Lösungen folgender Art mit heranziehen:

$$\psi(U,V)=\sqrt{C-V^2}\,\psi_1(U,V)+\sqrt{C+V^2}\,\psi_2(U,V)\,,$$

wo ψ_1 und ψ_2 Potenzreihen von der Form

$$\psi_1(U,V)=a_{01}V+a_{03}V^3+\cdots+U(a_{11}V+a_{13}V^3+\cdots)\,,$$
$$\psi_2(U,V)=b_{01}V+b_{03}V^3+\cdots+U(b_{11}V+b_{13}V^3+\cdots)$$

sind. Für y-Werte in der Nähe der Achse und $-C\leqq V\leqq+C$ erhalten die beiden Wurzeln in jeder Klammer entgegengesetzte Vorzeichen, sonst gleiche. Wir müssen uns also die Potentialfunktion ψ in der Form

$$\psi(U,V)=$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{C-V^2}\,\psi_1+\sqrt{C+V^2}\,\psi_2\right)^2}$$

vorstellen.

Die a_{0k}, a_{1k}, b_{0k}, b_{1k} sind so zu bestimmen, daß die x-Achse Stromlinie wird, wobei über $a_{01}=b_{01}=A$, $a_{11}=b_{11}=B$ frei verfügt werden darf. Alle übrigen Koeffizienten bestimmen sich dann rekursiv:

$$a_{kl}=\frac{(l+2)(l+1)}{k(k-1)}\,a_{k-3,\,l+2}+$$
$$+\frac{1}{k(k-1)}\sum_{n=0}^{l}(-1)^{\frac{n}{2}}\times \qquad (21)$$
$$\times\frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)+2(l-n)}{\frac{n}{2}+1}\,a_{k-3,\,l-n}$$

mit $n=0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ l-1$. Die Funktionen $\psi(U,V)$ wurden zur Vorbereitung der Behandlung von Beispielen für einen zur numerischen Rechnung in Frage kommenden U,V-Bereich tabelliert. Abb. 2 zeigt z. B. eine Darstellung der Funktion $\frac{1}{B}\psi_2(U,V)$.

Durch die Überlagerung $\varphi(U,V)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu+\psi(U,V)$ wird auf Grund der angegebenen Vorzeichenvorschrift y eine ungerade Funktion in V. Die

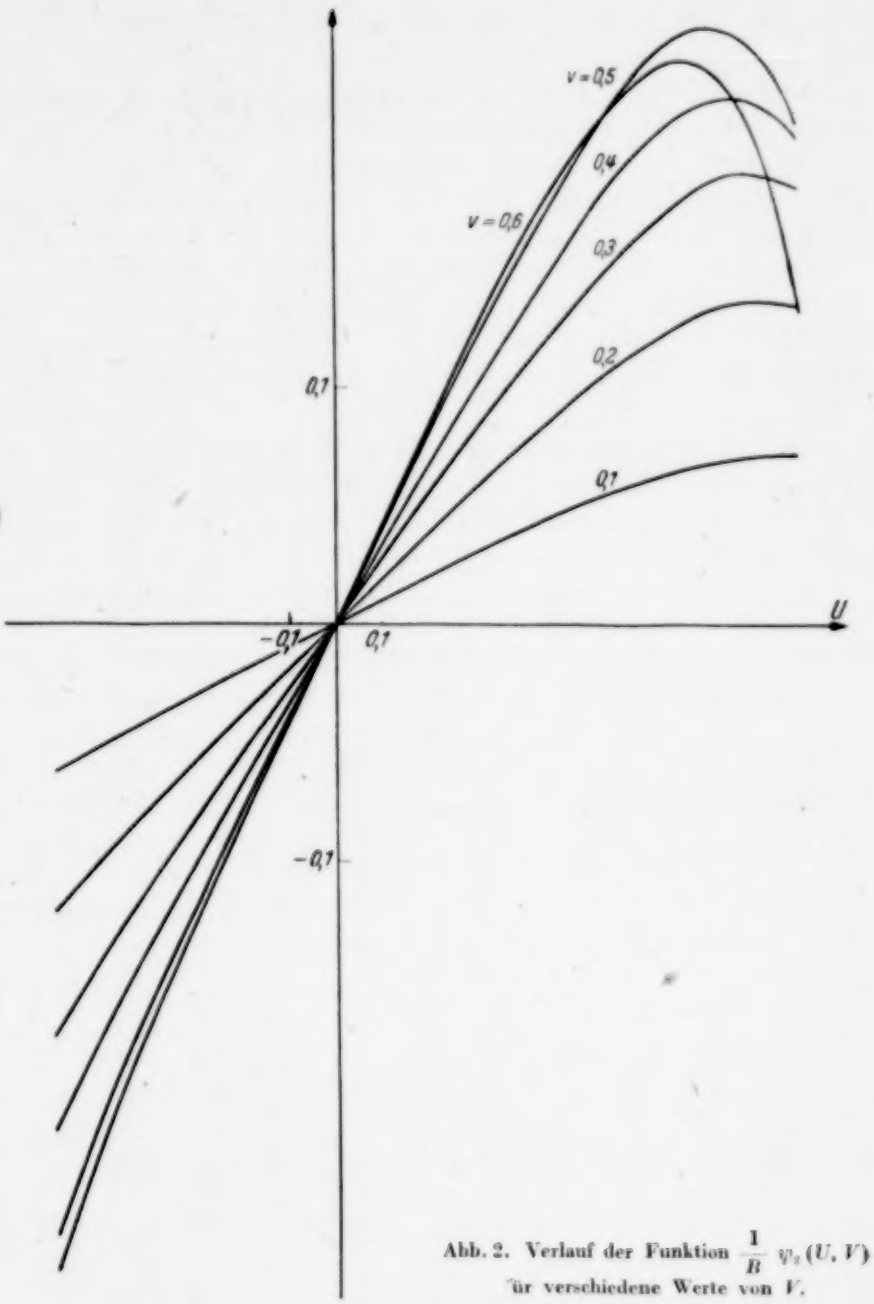

Abb. 2. Verlauf der Funktion $\frac{1}{B}\,\psi_2(U,V)$ für verschiedene Werte von V.

[1] *R. Sauer*, Gasdynamik, S. 94.
[2] *Tollmien*, Z. angew. Math. Mech. 21 (1941), S. 140.

Konstanten A, B, C bestimmen sich zusammen mit den α_ν, β_ν in $\sum_\nu \varphi_\nu$ aus den Randbedingungen, die U_μ dagegen genügen wiederum (auch für das Verfahren in Abschnitt 9) einer Gleichung $D(U_1, U_2, \ldots)=0$.

Läßt man die durch Separation zu gewinnenden Partikulärlösungen ganz außer Betracht, so kann man die Potentialfunktion als eine allgemeine Doppelreihe in U, V ansetzen, doch treten dann viele andere Schwierigkeiten auf. Man wird daher u. U. am besten von dem vorliegenden Verfahren in Abschnitt 7 und 8 für die spitzennahen Profilteile Gebrauch machen und den flacheren Profilteil, wenn er im Überschallgebiet liegt, nach der gewöhnlichen linearisierten Theorie behandeln.

11. Mit den vorstehend gegebenen mathematischen Grundlagen sollen so bald als möglich einige Beispiele numerisch durchgerechnet werden. Hierzu gehören auch die Berechnung eines Netzes von Äquipotentiallinien und die Konstruktion der zugehörigen Stromlinien zu einer einzelnen Partikulärlösung (8) für verschiedene Werte der Konstanten, die Konstruktion von Isotachennetzen usf. Außerdem ist das hier angegebene Verfahren besonders zweckmäßig für entsprechende Probleme, bei denen freie Oberflächen auftreten. Für diese numerischen Rechnungen sind zwar durch Tabellieren der benötigten Funktionen und Doppelreihen schon zusammen mit den vorstehenden theoretischen Rechnungen wichtige Vorarbeiten geleistet worden, sie werden aber doch noch geraume Zeit beanspruchen.

(Eingegangen am 25. Juni 1947.)

Halbebene und Parallelstreifen mit veränderlichem Elastizitätsmodul.

Von **F. Reutter** in Karlsruhe.

1. Einleitung. Elastische Medien mit veränderlichem E-Modul wurden bisher noch wenig behandelt. Es seien zwei äußerlich recht verschiedene Fragenkomplexe genannt, bei denen ein veränderlicher E-Modul eine Rolle spielt. So nimmt man bei der Untersuchung der Druckverteilung im Baugrund vielfach an, daß der E-Modul mit der Tiefe linear zunimmt, oder sogar, daß zunächst mit zunehmender Tiefe eine Abnahme und anschließend wieder eine Zunahme erfolge[1]. Der ersten Annahme entspricht die Halbebene mit linear zunehmendem E-Modul[2]; der zweiten kann unter Umständen ein Parallelstreifen mit einem von beiden Randlinien nach der Mitte zu abnehmenden E-Modul zugeordnet werden. Die vorliegenden Untersuchungen, die im Anschluß an eine Zusammenarbeit mit Herrn *W. Flügge* entstanden, sind in erster Linie folgender Frage gewidmet:

Vor einiger Zeit ist der Vorschlag gemacht worden, zur Material- und Gewichtsersparnis Vollplatten und -stäbe aus Holz oder Leichtmetall durch Verbundplatten bzw. -stäbe zu ersetzen[3]. Diese bestehen aus zwei dünnen Sperrholzplatten oder Blechen als Flanschen und einer leichten Füllschicht (Schaumstoff) als Schubverband. Bei solchen Verbundstäben können sich zwei verschiedene Arten von Instabilitäten einstellen: Einmal kann der Stab als Ganzes knicken (Eulerknicken), zum anderen können die beiden durch die Füllschicht elastisch gebetteten Bleche unabhängig voneinander beulen. Im letzteren Falle knittern die Deckbleche in ganz kurzen Wellen, wobei der Füllstoff vorwiegend in unmittelbarer Nähe des Bleches beansprucht wird, und die Deformationen dringen nur schwach in die Tiefe ein (s. Tabelle in Ziff. 8). Man kann daher eine weitere Gewichtsersparnis durch eine Konzentration des Füllstoffes nach der Oberfläche hin zu erreichen suchen. Damit wird auch der E-Modul der Füllschicht in Dickenrichtung veränderlich, und zwar nimmt E von der Berandung aus stark ab. Bei genügender Dicke der Füllstoffschicht kann zur Untersuchung des kurzwelligen Ausbeulens zum Teil gerechnet werden, als ob die unendliche Halbebene vorläge.

Die vorliegende Arbeit bestimmt die Verschiebungen der Randpunkte der Füllschicht und die Spannungsverteilung im Innern der Schicht unter der Annahme einer sinusförmigen Normalbelastung des Randes, die im Hinblick auf die folgenden Stabilitätsuntersuchungen gewählt wurde. Durch diese Untersuchungen ist die elastomechanische Grundlage zu einer Behandlung des Stabilitätsproblems der eingangs erwähnten Verbundstäbe geschaffen.

2. Die Differentialgleichungen für die Verschiebungen der Punkte einer elastischen Halbebene bei senkrecht zum Rande veränderlichem Elastizitätsmodul. Es sei die Halbebene $x>0$ gegeben (Abb. 1). Wir nehmen allgemein an, daß der Elastizitätsmodul E in der x-Richtung veränderlich sei: $E=E(x)$. Mit den Bezeichnungen: γ spezifisches Gewicht der Flächeneinheit, ν Querkontraktionszahl, σ_x, σ_y, τ_{xy} Komponenten des Spannungstensors und der Abkürzung $E'=dE/dx$ erhält man für die Verschiebungskomponenten $u(x,y)$ (x-Richtung), $v(x,y)$ (y-Richtung) die Differentialgleichungen

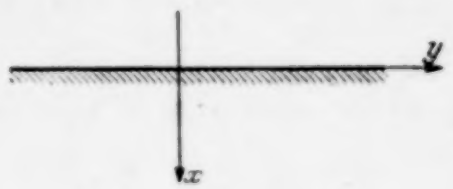

Abb. 1. Die Halbebene $x>0$.

$$\left.\begin{aligned} E(x)\left[\triangle u+\frac{1+\nu}{2}(v_{xy}-u_{yy})\right]+E'(x)(u_x+\nu v_y)+\gamma(1-\nu^2)=0\,,\\ E(x)\left[\triangle v+\frac{1+\nu}{2}(u_{xy}-v_{xx})\right]+E'(x)\frac{1-\nu}{2}(u_y+v_x)=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Hierzu treten die Randbedingungen: a) die Normalspannung am Rande $x=0$ soll sinusförmig

[1] *O. K. Fröhlich*, Druckverteilung im Baugrund. Wien 1934. — *A. Ramspeck*, Z. VDJ. 83 (1939) S. 496.
[2] *H. Borowicka*, Ing.-Arch. 14 (1943) S. 75.
[3] *W. Flügge* und *K. Marguerre*, Die optimale Knicklast eines Stabes, der aus zwei durch einen leichten Füllstoff verbundenen Blechen besteht. Luftfahrtforschung, Untersuchungen und Mitteilungen (U.M.) 1360/1. — *K. Marguerre*, Die optimale Beullast einer längsgedrückten, gelenkig gelagerten Platte, die aus zwei durch einen leichten Füllstoff verbundenen Blechen besteht. Desgl. U.M. 1360/2.

verteilt sein, b) die Verschiebungskomponente parallel zur Randlinie soll verschwinden, also

$$\sigma_x(0,y)=\frac{E(0)}{1-\nu^2}\left[u_x(0,y)+v_y(0,y)\right]=P_0\sin my, \tag{2a}$$

$$v(0,y)=0\,. \tag{2b}$$

Wegen (2a) setzen wir allgemein

$$\left.\begin{aligned} u(x,y)&=p(x)\sin my+q(x)\cos my+r(x)\,,\\ v(x,y)&=s(x)\sin my+t(x)\cos my+w(x)\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Geht man mit dem Ansatz (3) in das System (1) ein und setzt gleichzeitig die Querkontraktionszahl $\nu=0$, so ergibt sich folgendes System von sechs linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die sechs unbekannten Funktionen $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$, $t(x)$, $w(x)$:

$$\left.\begin{aligned} 2Ep''+2E'p'-Em^2p-Emt'&=0\,,\\ 2Eq''+2E'q'-Em^2q+Ems'&=0\,,\\ Er''+E'r'+\gamma&=0\,,\\ Es''+E's'-2Em^2s-Emq'-E'mq&=0\,,\\ Et''+E't'-2Em^2t+Emp'+E'mp&=0\,,\\ Ew''+E'w'&=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{3*}$$

Der Strich bedeutet jeweils Ableitung nach x.

Die Randbedingungen verlangen

1)
$$\sigma_x(0,y)=E_0u_x(0,y)=P_0(\sin my+\delta)^*\,,\quad E_0=E(0)\,,$$

daher

$$p'(0)=\frac{P_0}{E_0}\,,\ q'(0)=0\,,\ r'(0)=\delta\,, \tag{3a}$$

2)
$$v(0,y)=0\,,$$

daher

$$s(0)=0\,,\quad t(0)=0\,,\quad w(0)=0\,. \tag{3b}$$

Da im Unendlichen keine Verschiebung eintreten soll, gilt ferner

$$p(\infty)=q(\infty)=r(\infty)=s(\infty)=t(\infty)=w(\infty)=0\,. \tag{3c}$$

Aus der ersten und fünften der Gleichungen (3*) gewinnt man eine lineare Differentialgleichung vierter Ordnung für p allein:

$$p^{IV}+2\frac{E'}{E}p'''+\frac{1}{E^2}(3EE''-2E'^2-2m^2E^2)p''+\frac{1}{E^4}(E^3E'''-E^2E'E''-2m^2E'E^3)p'+m^4p=0, \tag{4}$$

aus der zweiten und vierten genau dieselbe Differentialgleichung für q.

3. Die elastische Halbebene bei exponentiell abklingendem E-Modul und verschwindender Querkontraktionszahl ν. Geht man mit dem Ansatz

$$E(x)=E_0e^{-kx} \tag{5}$$

in das System (3*) ein, so ergibt sich ein System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und die Gleichung (4) lautet jetzt

$$p^{IV}-2kp'''+(k^2-2m^2)p''+2m^2kp'+m^4p=0\,; \tag{6}$$

ihre charakteristische Gleichung ist

$$\varrho^4-2k\varrho^3+(k^2-2m^2)\varrho^2+2m^2k\varrho+m^4=0 \tag{7}$$

und hat die Wurzeln

$$\varrho_1=\varrho_2=\frac{k}{2}-\sqrt{\frac{k^2}{4}+m^2}\,,\quad \varrho_3=\varrho_4=\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{k^2}{4}+m^2}\,.$$

Wegen der Randbedingung (3c) scheiden die zu $\varrho_3=\varrho_4$ gehörigen Lösungsanteile aus, und es wird

* Die Konstante δ wird hier hinzugefügt, da sich $r'(0)=0$ formal nicht erreichen läßt; vgl. (11) und (12).

$$p(x)=(a_1 x+a_0)\, e^{-\left(\sqrt{\frac{k^2}{4}+m^2}-\frac{k}{2}\right)x}, \tag{8a}$$

$$q(x)=(b_1 x+b_0)\, e^{-\left(\sqrt{\frac{k^2}{4}+m^2}-\frac{k}{2}\right)x}, \tag{8b}$$

$$s(x)=(c_1 x+c_0)\, e^{\varrho_1 x}, \tag{8c}$$

$$t(x)=(d_1 x+d_0)\, e^{\varrho_1 x}. \tag{8d}$$

Auf Grund der übrigen Randbedingungen wird

$$\left.\begin{aligned} a_1&=\frac{-m^2}{2\varrho_1^2}\,\frac{P_0}{E_0},\quad a_0=\frac{2\varrho_1^2+m^2}{2\varrho_1^3}\,\frac{P_0}{E_0}=\frac{2\varrho_1-\varrho_3}{2\varrho_1^2}\,\frac{P_0}{E_0}.\\ b_1&=b_0=0,\quad c_1=c_0=0,\quad d_0=0,\quad d_1=\frac{m}{\varrho_1}a_1. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Zur vollständigen Bestimmung der Verschiebungen müssen noch die Funktionen $r(x)$ und $w(x)$ angegeben werden. Es wird $w(x)\equiv 0$.

Man muß annehmen, daß die Abnahme des E-Moduls mit einer entsprechenden Veränderung des spezifischen Gewichts verbunden ist. Wir machen den Ansatz

$$\gamma(x)=\gamma_0 e^{-\lambda x} \text{ mit } \lambda>k. \tag{10}$$

Dann wird

$$r(x)=-\frac{\gamma_0}{\lambda(\lambda-k)E_0}\,e^{-(\lambda-k)x}. \tag{11}$$

Die Forderung $r'(0)=0$ ist für $\gamma_0\neq 0$ formal nicht erfüllbar. Indessen bleibt

$$\delta=r'(0)=\frac{\gamma_0}{\lambda E_0} \tag{12}$$

für das Problem des Verbundstabes hinreichend klein, trägt also hier nichts Wesentliches zu den Spannungen bei. (Anders natürlich bei bodenmechanischen Untersuchungen.) Wir lassen in der dritten Gleichung von (3*) künftig γ unberücksichtigt, so daß $r\equiv 0$ und $\delta=0$ gesetzt werden kann.

So erhält man endlich für die Verschiebungen

$$\left.\begin{aligned} u(x,y)&=\frac{P_0}{E_0}\,\frac{-m^2x+2\varrho_1-\varrho_3}{2\varrho_1^2}\,e^{\varrho_1 x}\sin my,\\ v(x,y)&=-\frac{P_0}{E_0}\,\frac{m^3}{2\varrho_1^3}\,x\,e^{\varrho_1 x}\cos my. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Für die Spannungen ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x&=\frac{P_0}{2\varrho_1}(2\varrho_1-m^2x)\,e^{(\varrho_1-k)x}\sin my,\\ \sigma_y&=\frac{P_0}{2\varrho_1^3}m^4x\,e^{(\varrho_1-k)x}\sin my,\\ \tau_{xy}&=\frac{m\cdot P_0}{2\varrho_1^2}(\varrho_1-m^2x)\,e^{(\varrho_1-k)x}\cos my. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

4. Die elastische Halbebene mit exponentiell abklingendem E-Modul und nicht verschwindender Querkontraktionszahl ν. Geht man wiederum mit dem Ansatz (3) in das System (1) ein, setzt $E(x)=E_0e^{-kx}$, aber nimmt dieses Mal $\nu\neq 0$ an, so tritt an Stelle der charakteristischen Gleichung (7) die Gleichung

$$\varrho^4-2k\varrho^3+(k^2-2m^2)\,\varrho^2+2km^2\varrho+m^4+k^2m^2\nu=0$$

mit zwei Paaren konjugiert komplexer Wurzeln. Die Funktionen p, q, s, t erhalten alle die Form

$$p=(A_1\cos\beta_1 x+B_1\sin\beta_1 x)\,e^{-\alpha_1 x}+(A_2\cos\beta_2 x+B_2\sin\beta_2 x)\,e^{+\alpha_2 x}$$

mit

$$\alpha_1>0,\quad \alpha_2>0.$$

Die Klammerfaktoren können daher für hinreichend kleine β, also bei genügend kleinen ν-Werten durch $a_i+b_i x$ angenähert werden. A_2, B_2 sind Null zu setzen, damit die Verschiebungen im Unendlichen verschwinden. Numerische Rechnung zeigte, daß für die praktisch interessierenden Werte der Parameter m und k und $0<\nu<0{,}3$ die Abweichung von den Ergebnissen bei $\nu=0$ nicht ins Gewicht fällt.

5. Der elastische Parallelstreifen, dessen E-Modul beiderseits der Mittellinie nach dem Rande zu parabelförmig ansteigt. Für die Anwendung auf die Verbundplatte sowie unter Umständen auch für bodenmechanische Probleme im Falle eines zunächst abnehmenden, dann wieder zunehmenden E-Moduls interessiert in Wirklichkeit nicht das Problem der elastischen Halbebene, sondern das eines Parallelstreifens, dessen E-Modul von beiden Rändern nach der Mitte zu stark abnimmt. Für das Gesetz dieser Abnahme wurden verschiedene Ansätze versucht.

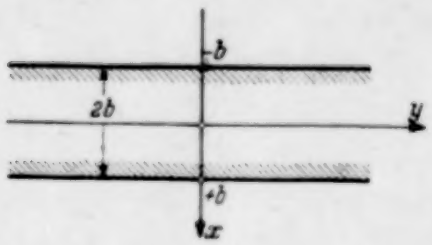

Abb. 2. Der Parallelstreifen $-b \leq x \leq +b$.

Als günstig erwiesen sich die folgenden beiden Ansätze:

$$E(x) = E_m (k x^2 + 1), \tag{15a}$$

$$E(x) = E_m \operatorname{Cof} k x . \tag{15b}$$

Zunächst soll der erste Ansatz behandelt werden.

Der Parallelstreifen habe die Breite $2b$, die y-Achse falle in seine Mittellinie (Abb. 2). Die beiden Berandungen seien wieder einer sinusförmigen Belastung ausgesetzt. Doch kann jetzt die Belastung des Randes $x = -b$ der Belastung von $x = +b$ gleich oder entgegengesetzt gerichtet sein. Im letzteren Falle ergibt sich eine zu $x = 0$ symmetrische Belastungs- und Verschiebungsform, im ersteren Falle eine asymmetrische (Abb. 3a und 3b). Von einer beliebigen Phasenverschiebung der beiden Belastungen gegeneinander soll abgesehen werden.

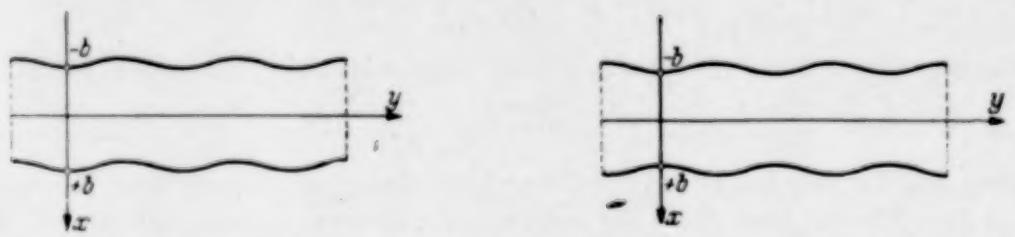

Abb. 3a u. b. Asymmetrische bzw. symmetrische Belastung und Randverschiebung des Parallelstreifens.

Im asymmetrischen Fall ist

$$\sigma_x(-b, y) = +P_0 \sin my ,$$

im symmetrischen dagegen

$$\sigma_x(-b, y) = -P_0 \sin my .$$

Weiter fordern wir

$$\sigma_x(+b, y) = P_0 \sin my , \qquad v(-b, y) = 0 , \qquad v(+b, y) = 0 .$$

Dies führt mit $E_r = E(b) = E(-b)$ auf folgende Randbedingungen für die Funktionen p, q, s, t, w des Systems (3*):

$$\left.\begin{aligned} p'(+b) &= \frac{P_0}{E_r} , & p'(-b) &= \mp \frac{P_0}{E_r} , \\ q'(+b) &= 0 , & q'(-b) &= 0 , \\ s(+b) &= 0 , & s(-b) &= 0 , \\ t(+b) &= 0 , & t(-b) &= 0 , \\ w(+b) &= 0 , & w(-b) &= 0 . \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Das obere Vorzeichen in $p'(-b)$ bezieht sich auf den symmetrischen, das untere (+) auf den asymmetrischen Belastungsfall.

Gehen wir mit dem Ansatz (15a) in (4) ein, so ergibt sich folgende lineare homogene Differentialgleichung vierter Ordnung für die Funktion $p(x)$:

$$\begin{aligned} &(kx^2+1)^2 p^{IV} + 4kx(kx^2+1) p''' + (6k - 2m^2 - (2k^2 + 4m^2 k) x^2 - 2m^2 k^2 x^4) p \\ &\quad - 4kx(k + m^2 + m^2 k x^2) p' + m^4 (kx^2+1)^2 p = 0 . \end{aligned} \tag{17}$$

Diese Differentialgleichung ist an den Stellen $x_{1,2} = \dfrac{i}{\pm\sqrt{k}}$ stark singulär[1]; sie sind zugleich die einzigen im Endlichen gelegenen singulären Stellen der Differentialgleichung (17).

[1] S. z. B. *E. Kamke*, Differentialgleichungen. Leipzig 1942. S. 79.

Wir brauchen nun zur Bestimmung der Randverschiebungen die Lösungen der Differentialgleichung in der Umgebung der Stellen $x_0 = \pm b$. Die vier Integrale eines Fundamentalsystems dieser Differentialgleichung lassen sich in der Umgebung beider Ränder durch Potenzreihen in $(x - x_0)$ darstellen, die, welchen Wert auch k haben mag, jeweils über die Stelle $x = 0$ hinaus konvergieren, so daß jedes der beiden Fundamentalsysteme p_I, p_{II} ein Funktionselement von $p(x)$ und das eine die analytische Fortsetzung des anderen darstellt (Abb. 4).

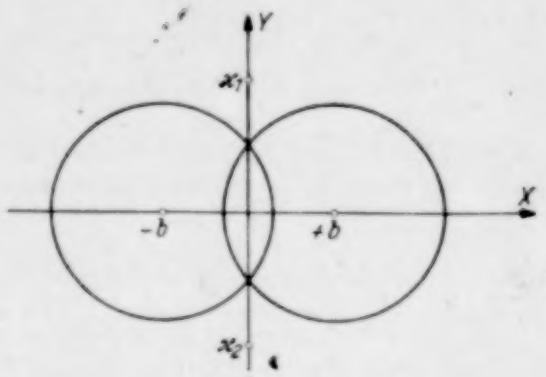

Abb. 4. Die Konvergenzkreise der beiden Funktionselemente von $p(x)$.

Wir setzen nun in (17) $x = \xi + x_0$ und machen für $p(x) = \bar{p}(x - x_0) = \bar{p}(\xi)$ den Ansatz

$$\bar{p}(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \cdots \quad . \tag{18}$$

Dann bestimmen sich die Koeffizienten a_μ dieser Potenzreihe rekursiv aus folgendem Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} &24(k^2 x_0^4 + 2kx_0^2 + 1)\, a_4 + 6(4k^2 x_0^3 + 4kx_0)\, a_3 + \\ &+ 2(6k - 2m^2 - 2k^2 x_0^2 - 4m^2 k x_0^2 - 2m^2 k^2 x_0^4)\, a_2 + \\ &+ (4m^2 k^2 x_0^3 + 4m^2 k x_0 + 4k^2 x_0)\, a_1 + (m^4 k^2 x_0^4 + 2m^4 k x_0^2 + m^4)\, a_0 = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{19a}$$

$$\left.\begin{aligned} &120(k^2 x_0^4 + 2kx_0^2 + 1)\, a_5 + 48(4k^2 x_0^3 + 4kx_0)\, a_4 + \\ &+ 6(10k^2 x_0^2 + 10k - 2m^2 - 4m^2 k x_0^2 - 2m^2 k^2 x_0^4)\, a_3 + \\ &+ 2(8k^2 x_0 + 12m^2 k x_0 + 12m^2 k^2 x_0^3)\, a_2 + \\ &+ (-12m^2 k^2 x_0^2 - 4m^2 k - 4k^2 + m^4 k^2 x_0^4 + 2m^4 k x_0^2 + m^4)\, a_1 + \\ &+ (4m^4 k^2 x_0^3 + 4m^4 k x_0)\, a_0 = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{19b}$$

$$\left.\begin{aligned} &360(k^2 x_0^4 + 2kx_0^2 + 1)\, a_6 + 180(4k^2 x_0^3 + 4kx_0)\, a_5 + \\ &+ (216k + 408k^2 x_0 - 24m^2 - 24m^2 k x_0^2 - 24m^2 k^2 x_0^4)\, a_4 + \\ &+ (36k^2 x_0 - 60m^2 k x_0 - 60m^2 k^2 x_0^3)\, a_3 + \\ &+ (-12k^2 - 16m^2 k - 48m^2 k^2 x_0^2 + m^4 k^2 x_0^4 + 2m^4 k x_0^2 + m^4)\, a_2 + \\ &+ (-12m^2 k^2 x_0 + 4m^4 k^2 x_0^3 + 4m^4 k x_0)\, a_1 + (6m^4 k^2 x_0^2 + 2m^4 k)\, a_0 = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{19c}$$

$$\left.\begin{aligned} &840(k^2 x_0^4 + 2kx_0^2 + 1)\, a_7 + 480(4k^2 x_0^3 + 4kx_0)\, a_6 + \\ &+ 40(35k^2 x_0^2 + 15k - m^2 - 2m^2 k x_0^2 - m^2 k^2 x_0^4)\, a_5 + \\ &+ (320k^2 x_0 - 112m^2 k x_0 - 112m^2 k^2 x_0^3)\, a_4 + \\ &+ (m^4 k^2 x_0^4 + 2m^4 k x_0^2 + m^4 - 36m^2 k - 108m^2 k^2 x_0^2)\, a_3 + \\ &+ (4m^4 x_0 k + 4m^4 x_0^3 k^2 - 40m^2 k^2 x_0)\, a_2 + \\ &+ (2m^4 k + 6m^4 k^2 x_0^2 - 4m^2 k^2)\, a_1 + 4m^4 x_0 k^2 a_0 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{19d}$$

usw.

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt:

$$\left.\begin{aligned} a_4 &= \alpha_{40}(x_0)\, a_0 + \alpha_{41}(x_0)\, a_1 + \alpha_{42}(x_0)\, a_2 + \alpha_{43}(x_0)\, a_3\,, \\ a_5 &= \alpha_{50}(x_0)\, a_0 + \alpha_{51}(x_0)\, a_1 + \alpha_{52}(x_0)\, a_2 + \alpha_{53}(x_0)\, a_3\,, \\ a_6 &= \alpha_{60}(x_0)\, a_0 + \alpha_{61}(x_0)\, a_1 + \alpha_{62}(x_0)\, a_2 + \alpha_{63}(x_0)\, a_3\,, \\ a_7 &= \alpha_{70}(x_0)\, a_0 + \alpha_{71}(x_0)\, a_1 + \alpha_{72}(x_0)\, a_2 + \alpha_{73}(x_0)\, a_3\,, \\ &\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ &\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ &\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Damit wird

$$\left.\begin{aligned}\bar{p}(x-x_0)=\bar{p}(\xi)=a_0[1 &+\alpha_{40}(x_0)\,\xi^4+\alpha_{50}(x_0)\,\xi^5+\cdots+\alpha_{70}(x_0)\,\xi^7+\cdots]+\\ +a_1[\xi &+\alpha_{41}(x_0)\,\xi^4+\alpha_{51}(x_0)\,\xi^5+\cdots+\alpha_{71}(x_0)\,\xi_7+\cdots]+\\ +a_2[\xi^2 &+\alpha_{42}(x_0)\,\xi^4+\alpha_{52}(x_0)\,\xi^5+\cdots+\alpha_{72}(x_0)\,\xi_7+\cdots]+\\ +a_3[\xi^3 &+\alpha_{43}(x_0)\,\xi^4+\alpha_{53}(x_0)\,\xi^5+\cdots+\alpha_{73}(x_0)\,\xi_7+\cdots].\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Der gleiche Ansatz mit Konstanten b_μ gilt für $q(x)$. Die Funktion $t(x)$ aber bestimmen wir ohne Integration mit Hilfe der ersten und fünften Gleichung (3*) durch

$$\bar{t}(\xi)=\frac{1}{m^3}\bar{p}'''(\xi)+\frac{4k\xi+4kx_0}{m^3(k\xi^2+2k\xi x_0+kx_0^2+1)}\bar{p}''(\xi)+\frac{2k}{m^3(k\xi^2+2kx_0\xi+kx_0^2+1)}\bar{p}'(\xi). \tag{22}$$

Wir müssen nun für die Lösungen $p(x)$ und $t(x)$ die Konstanten $a_0,\ldots,a_3$ gemäß den Randbedingungen (16) bestimmen. (Die Funktionen $q(x)$ und $s(x)$ werden wegen (16) i. a. identisch Null). Es sind aber zwei verschiedene Fundamentalsysteme, eines für $x_0=+b$, eines für $x_0=-b$, zu wählen, und es ist die analytische Fortsetzung des einen Systems in das andere zu bestimmen. Da die Potenzreihen für beide Fundamentalsysteme noch für $x=0$ konvergieren, setzen wir

$$\left.\begin{aligned}p_I(x)&=a_0p_{0\,I}(x)+a_1p_{1\,I}(x)+a_2p_{2\,I}(x)+a_3p_{3\,I}(x),\\ p_{II}(x)&=A_0p_{0\,II}(x)+A_1p_{1\,II}(x)+A_2p_{2\,II}(x)+A_3p_{3\,II}(x).\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Dabei bilden $p_{0\,I}(x),\ldots,p_{3\,I}(x)$ ein Fundamentalsystem in der Umgebung von $x_0=+b$, $p_{0\,II}(x),\ldots,p_{3II}(x)$ ein Fundamentalsystem in der Umgebung von $x_0=-b$. Die Hälfte der acht Konstanten $a_0,\ldots,A_3$ bestimmen sich aus den Randbedingungen (16), die andere Hälfte aus der Forderung, daß $p_{II}(x)$ die analytische Fortsetzung von $p_I(x)$ darstellt. Wir setzen die Lösungen an der Stelle $x=0$ zusammen und erhalten dafür folgende vier Bedingungen:

$$p_I(0)=p_{II}(0),\quad p'_I(0)=p'_{II}(0),\quad p''_I(0)=p''_{II}(0),\quad p'''_I(0)=p'''_{II}(0). \tag{24}$$

Andererseits folgt aus der ersten, zweiten, siebten und achten Bedingung (16)

$$\left.\begin{aligned}&p'_I(b)=a_1=\frac{P_0}{E_0}, && p'_{II}(-b)=A_1=\mp\frac{P_0}{E_0},\\ &ka_1+4kba_2+3(kb^2+1)a_3=0, && ka_1+4k(-b)A_2+3(kb^2+1)A_3=0,\\ &a_2+\frac{3(kb^2+1)}{4kb}a_3=-\frac{P_0}{4bE_0}, && A_2-\frac{3(kb^2+1)}{4kb}A_3=\frac{P_0}{4bE_0}.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Nach Einsetzen der Werte (25) für a_1, a_2, A_1, A_2 in (24) sind dies gerade vier lineare inhomogene Gleichungen zur Bestimmung der restlichen vier Konstanten a_0, a_3, A_0, A_3. Eine Vereinfachung ergibt sich noch aus den Symmetriebedingungen im symmetrischen bzw. asymmetrischen Fall, doch gehen wir darauf erst in Ziff. 7 ein.

Für die entsprechenden acht Konstanten b_μ, B_μ der Funktionen $q_I(x)$, $q_{II}(x)$ erhält man wegen der dritten bis sechsten Gleichung (16) und dem den Gln. (24) analogen System i. a. die trivialen Werte 0. Für die Konstanten b_0, b_3, B_0, B_3 ergibt sich ein lineares homogenes System mit derselben Determinante Δ wie für das erste System (24).

Der Zahlenwert von Δ hängt von den drei Parametern b, k und m ab. Es ist nicht zu erwarten, daß sich für die in Betracht kommenden Wertetripel b, k, m der Wert $\Delta=0$ ergibt.

Der Vollständigkeit halber seien noch die nur für bodenmechanische Probleme interessierenden Funktionen $r(x)$ und $w(x)$ unter den Randbedingungen $r(-b)=r'(-b)=0$ und $w(b)=w(-b)=0$ angegeben:

$$r(x)=\frac{-\gamma b}{E_0\sqrt{k}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{k}(b+x)}{1-bkx}-\frac{\gamma}{2kE_0}\ln\frac{kx^2+1}{kb^2+1}$$

$$w(x)=0.$$

Die Annahme eines veränderlichen γ ist hier nicht erforderlich. Das angegebene Verfahren zur Konstantenbestimmung verläuft im Falle unsymmetrischer Randbedingungen für p und t ebenso, insbesondere auch, wenn für den unteren Rand etwa keine sinusförmige Normalbelastung gefordert wird. Dasselbe gilt für den Ansatz in Ziff. 6.

6. Der elastische Parallelstreifen, dessen E-Modul beiderseits der Mittellinie nach dem Rande zu nach einer Cof-Funktion ansteigt. Macht man für $E(x)$ den Ansatz

$$E(x)=E_0 \operatorname{Cof} kx\,, \tag{26}$$

so erhält man aus (4) folgende lineare Differentialgleichung vierter Ordnung für $p(x)$:

$$p^{IV}+2k\operatorname{Tg} kx\,p'''+(3k^2-2m^2-2k^2\operatorname{Tg}^2 kx)\,p''-2m^2k\operatorname{Tg} kx\,p'+m^4p=0\,. \tag{27}$$

Die Differentialgleichung hat singuläre Stellen da, wo die Tg-Funktion Pole besitzt, d. i. für

$$x=\pm\frac{i\pi}{2k}\,,\quad x=\pm\frac{3i\pi}{2k}\,,\ldots\ldots,$$

und zwar sind dies schwach singuläre Stellen, da Pole erster Ordnung vorliegen. Man kann daher wiederum die Potenzreihenentwicklung für $p(x)$ nicht in der Umgebung von $x=0$ ansetzen, da dann, wie die Zahlenrechnung ergibt, für $x=\pm b$ i. a. keine Konvergenz mehr bestünde.

Wir gehen daher in (27) mit dem Ansatz (18) ein, wobei wieder $\xi=x-x_0$ zu setzen ist, und denken uns gleichzeitig $\operatorname{Tg} kx$ durch die Potenzreihe

$$\operatorname{Tg} kx=d_0+d_1\xi+d_2\xi^2+d_3\xi^3+d_4\xi^4\ldots \tag{28}$$

mit

$$d_0=\operatorname{Tg} kx_0\,,\ d_1=k(1-\operatorname{Tg}^2 kx_0)\,,\ d_2=k^2\operatorname{Tg} kx_0\,(\operatorname{Tg}^2 kx_0-1),$$
$$d_3=\frac{k^3}{3}\,(1-\operatorname{Tg}^2 kx_0)\,(3\operatorname{Tg}^2 kx_0-1)\,,\ d_4=\frac{k^4}{60}\operatorname{Tg} kx_0\,(1-\operatorname{Tg}^2 kx_0)\,(8-6\operatorname{Tg}^2 kx_0)$$

ersetzt. Dann bestimmen sich die a_μ im Ansatz (18) rekursiv in folgender Weise:

$$\left.\begin{aligned}
a_4&=-\frac{m^4}{24}\,a_0+\frac{m^2k\,d_0}{12}\,a_1+\left(\frac{m^2}{6}+\frac{k^2d_0^2}{6}-\frac{k^2}{4}\right)a_2-\frac{k\,d_0}{2}\,a_3\,.\\
a_5&=\frac{m^4k\,d_0}{60}\,a_0+\left(\frac{m^2k\,d_1}{60}-\frac{m^4}{120}-\frac{m^2k^2d_0^2}{30}\right)a_1+\\
&\quad+\left(\frac{k^3d_0}{6}-\frac{k^3d_0^3}{15}-\frac{m^2k\,d_0}{30}\right)a_2+\left(\frac{m^2}{10}+\frac{3k^2d_0^2}{10}-\frac{3k^2}{20}-\frac{k\,d_1}{10}\right)a_3\,.\\
a_6&=\left(\frac{m^4k\,d_1}{180}+\frac{k^2m^4}{240}-\frac{m^6}{360}-\frac{k^2m^4d_0}{360}-\frac{m^4k^2d_0^2}{180}\right)a_0+\\
&\quad+\frac{m^2k^3d_0^3}{60}+\frac{m^2k\,d_2}{180}+\frac{m^4k\,d_0}{120}-\frac{m^2k^3d_0}{120}-\frac{m^2k^2d_0d_1}{60}\Big)a_1+\\
&\quad+\left(\frac{m^4}{120}+\frac{k^2d_1^2}{90}+\frac{k^4}{40}+\frac{m^2k^2d_0^2}{30}+\frac{k^4d_0^4}{30}+\frac{k^3d_1}{30}+\frac{k^2d_0d_2}{45}+\right.\\
&\quad-\frac{m^2k\,d_1}{90}-\frac{m^2k^2}{30}-\frac{4k^4d_0^2}{45}-\frac{k^3d_0^2d_1}{45}\Big)a_2+\\
&\quad+\left(\frac{k^2d_0d_1}{15}+\frac{m^2k\,d_0}{60}+\frac{k^2d_0\,d_1}{15}+\frac{k^3d_0}{20}-\frac{k\,d_2}{30}-\frac{m^2k\,d_0}{30}-\frac{k^3d_0^3}{30}\right)a_3
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

usw.

Mit dem in Ziff. **5** angewandten Verfahren allein kommt man aber jetzt bei der Konstantenbestimmung nicht mehr zum Ziel. Für die praktisch sich ergebenden b- und k-Werte wird nämlich $\operatorname{Tg} bk\approx 1$. Es darf daher in der Umgebung der Streifenränder $\operatorname{Tg} kx$ durch 1 ersetzt werden. Damit läßt sich für jeden Streifenrand ein Fundamentalsystem sofort anschreiben. Aber diese Fundamentalsysteme gelten natürlich für $x=0$ längst nicht mehr. Es ist daher noch die Stelle x_0 ausfindig zu machen, für die die Entwicklung (28) von $\operatorname{Tg} kx$ etwa nach $\xi^4=(x-x_0)^4$ abgebrochen folgende Eigenschaften hat:

Für $x=0$ muß sich mit genügender Genauigkeit der Wert Null ergeben, für eine Stelle $0<x_1<b$ muß sich annähernd der Wert 1 als exakter wie als Näherungswert von $\operatorname{Tg} kx_1$ ergeben.

Dann setzen wir insgesamt vier Fundamentalsysteme an:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Stelle } x=+b: && p_a(x)\,,\\
&\text{Stelle } x=x_0: && p_c(x)\,,\\
&\text{Stelle } x=-x_0: && p_C(x)\,,\\
&\text{Stelle } x=-b: && p_A(x)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Als Fundamentalsysteme $p_a(x)$ und $p_A(x)$ dienen diejenigen der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$p^{IV} + 2k p''' + (k^2 - 2m^2) p'' - 2m^2 k p' + m^4 p = 0\,, \tag{31a}$$

$$p^{IV} - 2k p''' + (k^2 - 2m^2) p'' + 2m^2 k p' + m^4 p = 0 \tag{31b}$$

und den charakteristischen Exponenten

$$\varrho_0 = -\varrho_1 = -\frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} + m^2}\,,\quad \varrho_2 = -\varrho_3 = -\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} + m^2}\,, \tag{31a'}$$

$$\varrho_0' = -\varrho_1' = -\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} + m^2} = \varrho_2\,,\quad \varrho_2' = -\varrho_3' = -\frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} + m^2} = -\varrho_1\,. \tag{31b'}$$

Die Fundamentalsysteme p_c und p_C erhält man gemäß den Gleichungen (21) und (29) als Potenzreihen in $\xi = (x - x_0)$. Dabei sind die Konstanten a_μ für p_c durch c_μ, für p_C durch C_μ zu ersetzen, die α_{il} aber das eine Mal an der Stelle x_0, das andere Mal an der Stelle $-x_0$ zu bilden. Ihre Werte erhält man aus (29), indem man x_0 in den $d_\mu(x_0)$ durch x_0 bzw. $-x_0$ ersetzt. Die Bedeutung der α_{il} als Koeffizienten der $a_0, \ldots, a_3$ im System (29) ist aus (20) ersichtlich. Die zugehörigen Werte der Funktion $t(x)$ bestimmen sich wiederum nach (22).

Die Randbedingungen für $p(x)$ und $t(x)$ verlangen, wenn wir für beide Ränder sinusförmige symmetrische bzw. asymmetrische Normalbelastung und Verschwinden von v vorschreiben,

$$p_a'(b) = \frac{P_0}{E_0}\,,\ t_a(b) = 0,\ p_A'(-b) = \mp\frac{P_0}{E_0}\,,\ t_A(-b) = 0.$$

Hieraus bestimmen sich

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{P_0}{E_0}\, e^{-\varrho_0 b}\left\{\frac{1}{\varrho_0} + \frac{m^2}{2\varrho_0^3} + \frac{m^2 b}{2\varrho_0^2} + e^{\varrho_2 b}\left[\left(\frac{m^2}{\varrho_0^2} + \frac{m^4}{2\varrho_0^4} + \frac{m^4 b}{2\varrho_0^3} - \frac{1}{2} - \frac{\varrho_0 b}{2}\right) a_2 + \right.\right.\\ &\quad \left.\left. + \left(\frac{m^2 b}{2\varrho_0^2} + \frac{m^4 b}{2\varrho_0^4} - \frac{m^2}{2\varrho_0^3} + \frac{m^4 b^2}{2\varrho_0^3} + \frac{\varrho_0}{2m^2} + \frac{b}{2} + \frac{\varrho_0^2 b}{2m^2} - \frac{\varrho_0 b^2}{2}\right) a_3\right]\right\},\\ a_1 &= \frac{P_0}{E_0}\, e^{-\varrho_0 b}\left\{-\frac{m^2}{2\varrho_0^2} + e^{\varrho_2 b}\left[\left(-\frac{m^4}{2\varrho_0^3} + \frac{\varrho_0}{2}\right) a_2 + \left(\frac{m^2}{2\varrho_0^2} - \frac{m^4 b}{2\varrho_0^3} - 1 - \frac{\varrho_0^2}{2m^2} + \frac{b\varrho_0}{2}\right) a_3\right]\right\} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

und analog A_0 und A_1.

Die vier Fundamentallösungen p_a, p_c, p_C, p_A enthalten zusammen sechzehn Konstanten $a_0, \ldots, A_3$, von denen durch (32) nur vier bestimmt sind. Die übrigen zwölf Konstanten bestimmen sich durch die Anschlußbedingungen

$$\left.\begin{aligned} p_a(x_1) &= p_c(x_1)\\ p_a'(x_1) &= p_c'(x_1)\\ p_a''(x_1) &= p_c''(x_1)\\ p_a'''(x_1) &= p_c'''(x_1) \end{aligned}\right\}$$

(Enthält $a_2, a_3, c_0, c_1, c_2, c_3$; hieraus sind c_0, c_1, c_2, c_3 durch a_2, a_3 auszudrücken und in (33b) einzusetzen.) (33a)

$$\left.\begin{aligned} p_c(0) &= p_C(0)\\ p_c'(0) &= p_C'(0)\\ p_c''(0) &= p_C''(0)\\ p_c'''(0) &= p_C'''(0) \end{aligned}\right\}$$

(Enthält, nachdem $c_0, \ldots, c_3$ mittels (33a) durch a_2, a_3 ausgedrückt sind, noch a_2, a_3, C_0, C_1, C_2, C_3; das System ist nach $C_0, \ldots, C_3$ aufzulösen, das Resultat in (33c) einzusetzen.) (33b)

$$\left.\begin{aligned} p_C(-x_1) &= p_A(-x_1)\\ p_C'(-x_1) &= p_A'(-x_1)\\ p_C''(-x_1) &= p_A''(-x_1)\\ p_C'''(-x_1) &= p_A'''(-x_1) \end{aligned}\right\}$$

(Enthält zunächst C_0, C_1, C_2, C_3, A_2, A_3; nachdem $C_0, \ldots, C_3$ mit Hilfe von (33b) durch a_2, a_3 ausgedrückt sind, stellt (33c) ein System von vier linearen (inhomogenen) Gln. für die vier Konstanten a_2, a_3, A_2, A_3 dar.) (33c)

Sind so die Konstanten a_2, A_2, a_3, A_3 bestimmt, so gilt für den Rand $x=b$

$$p_a(x)=(a_0+a_1x)e^{-\varrho_1 x}+(a_2+a_3x)e^{\varrho_2 x}, \tag{34a}$$

$$t_a(x)=(d_0+d_1x)e^{-\varrho_1 x}+(d_2+d_3x)e^{\varrho_2 x} \tag{34b}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} d_0&=\left(\frac{2}{m}+\frac{m}{\varrho_1^2}\right)a_1-\frac{m}{\varrho_1}a_0, \quad d_1=-\frac{m}{\varrho_1}a_1, \\ d_2&=\left(\frac{2}{m}+\frac{m}{\varrho_2^2}\right)a_3+\frac{m}{\varrho_2}a_2, \quad d_3=\frac{m}{\varrho_2}a_3, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

für den Rand $x=-b$ dagegen

$$p_A(x)=(A_0+A_1x)e^{\varrho_2 x}+(A_2+A_3x)e^{-\varrho_1 x}, \tag{36a}$$

$$t_A(x)=(D_0+D_1x)e^{\varrho_2 x}+(D_2+D_3x)e^{-\varrho_1 x}. \tag{36b}$$

Die Zusammenfügung der einzelnen Fundamentallösungen in einer komplexen (X,Y)-Ebene wird aus Abb. 5 ersichtlich.

Schließlich wird unter denselben Randbedingungen wie in Ziff. 5

$$r(x)=-\frac{2\gamma b}{E_0 k}(\operatorname{arctg} e^{kx}-\operatorname{arctg} e^{-kb})-\frac{\gamma}{E_0}\int_{-b}^{x}\frac{x\,dx}{\mathfrak{Cof}\,kx}.$$

Für die Rechnungsgänge von Ziff. 6 ergeben sich ebenfalls noch Vereinfachungen durch Berücksichtigung der im asymmetrischen wie im symmetrischen Fall bestehenden Symmetriebedingungen. Dadurch erhält man zwischen den Konstanten der Fundamentalsysteme analoge Beziehungen, wie sie in Ziff. 7 explizit angegeben werden.

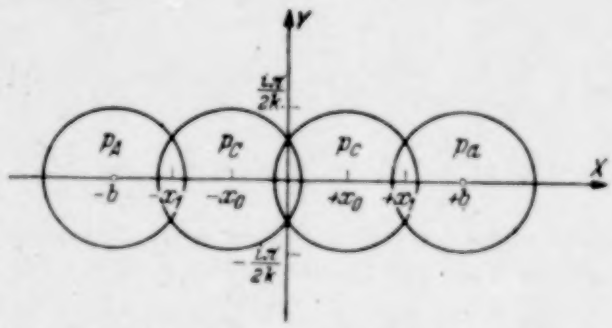

Abb. 5. Die Konvergenzkreise für die Fundamentalsysteme $p_a(x)$, $p_A(x)$, $p_c(x)$, $p_C(x)$.

7. Der elastische Parallelstreifen, dessen E-Modul beiderseits der Mittellinie nach dem Rande zu exponentiell ansteigt. Die beiden Ansätze für den E-Modul in Ziff. 5 und 6 ergeben zur Bestimmung der Randverschiebung schon recht verwickelte Rechnungen. Zur Anwendung auf das Knittern der eingangs erwähnten Verbundstäbe, wo bei kleinen Wellenlängen in erster Linie die randnahen Teile der Füllstoffschicht für die Stabilisierung der Bleche maßgebend sind, behandeln wir schließlich noch folgenden Ansatz für den E-Modul: $E(x)=E_m e^{k|x|}$, (E_m = E-Modul in der Mittellinie des Parallelstreifens). Dadurch vereinfacht sich die Bestimmung der Randverschiebung gegenüber Ziff. 5 und 6 erheblich, und in der Umgebung des Randes läßt sich weitgehende Übereinstimmung mit Ziff. 6 erreichen. Für die beiden Hälften des Parallelstreifens erhält man dann jeweils eine geschlossene Lösung, muß allerdings jetzt für $x=0$ einen Sprung für dE/dx in Kauf nehmen. Wir bestimmen auch für diesen Ansatz die Funktionen $p(x)$ und $t(x)$. Es gelten gemäß Ziff. 6 die Differentialgleichungen (31a) für $x>0$, (31b) für $x<0$ und die dort angegebenen Fundamentalsysteme (34a) und (36a) für $p(x)$, (34b) und (36b) für $t(x)$.

Die Randbedingungen verlangen für $x=+b$ und $x=-b$

$$p'_a(b)=\frac{P_0}{E_m e^{kb}},\ t_a(b)=0,\ p'_A(-b)=\pm\frac{P_0}{E_m e^{kb}},\ t_A(-b)=0. \tag{37}$$

Das obere Vorzeichen in der dritten Gleichung (37) bezieht sich wieder auf den asymmetrischen, das untere auf den symmetrischen Fall. In der Streifenmitte $x=0$ fügen wir $p_a(x)$ und $p_A(x)$ durch folgende Bedingungen zusammen:

$$p_a(0)=p_A(0),\ p'_a(0)=p'_A(0),\ p''_a(0)=p''_A(0),\ p'''_a(0)=p'''_A(0). \tag{38}$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung (37) erhält man a_0 und a_1 durch a_2, a_3 ausgedrückt nach (32) in Ziff. 6. Die dritte und vierte Gleichung (37) werden dagegen zweckmäßig nach A_2, A_3 aufgelöst. Dann ergibt sich mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= e^{\varrho_1 b}\left(\frac{m^2 b}{2\varrho_1^2}-\frac{m^2}{2\varrho_1^3}-\frac{1}{\varrho_1}\right),\\
\beta &= e^{(\varrho_1+\varrho_2)b}\left(\frac{m^2}{\varrho_1^2}+\frac{m^4}{2\varrho_1^4}-\frac{m^4 b}{2\varrho_1^3}-\frac{1}{2}+\frac{\varrho_1 b}{2}\right),\\
\gamma &= e^{(\varrho_1+\varrho_2)b}\left(\frac{m^2 b}{2\varrho_1^2}+\frac{m^4 b}{2\varrho_1^4}+\frac{m^2}{2\varrho_1^3}-\frac{m^4 b^2}{2\varrho_1^3}-\frac{\varrho_1}{2m^2}+\frac{b}{2}+\frac{\varrho_1^2 b}{2m^2}+\frac{\varrho_1 b^2}{2}\right),\\
\delta &= -e^{+\varrho_1 b}\,\frac{m^2}{2\varrho_1^2},\\
\varepsilon &= e^{(\varrho_1+\varrho_2)b}\left(\frac{m^4}{2\varrho_1^3}-\frac{\varrho_1}{2}\right),\\
\eta &= e^{(\varrho_1+\varrho_2)b}\left(\frac{m^2}{2\varrho_1^2}+\frac{m^4 b}{2\varrho_1^3}-\frac{\varrho_1^2}{2m^2}-\frac{b\varrho_1}{2}-1\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

das folgende System von vier linearen Gleichungen für die vier Unbekannten a_2, a_3, A_0, A_1:

$$\left.\begin{aligned}
&(1+\beta)(a_2-A_0)+\gamma(a_3+A_1)=\begin{cases}0,\\-2\alpha,\end{cases}\\
&(\varrho_1^2\beta-2\varrho_1\varepsilon+\varrho_2^2)(a_2-A_0)+(\varrho_1^2\gamma-2\varrho_1\eta+2\varrho_2)(a_3+A_1)=\begin{cases}0,\\-2\alpha\varrho_1^2+2\varrho_1\delta,\end{cases}\\
&(\varepsilon-\varrho_1\beta+\varrho_2)(a_2+A_0)+(\eta-\varrho_1\gamma+1)(a_3-A_1)=\begin{cases}2\varrho_1\alpha-2\delta,\\0,\end{cases}\\
&(3\varrho_1^2\varepsilon-\varrho_1^3\beta+\varrho_2^3)(a_2+A_0)+(3\varrho_1^2\eta+3\varrho_2^2-\varrho_1^3\gamma)(a_3-A_1)=\begin{cases}2\varrho_1^3\alpha-6\varrho_1^2\delta,\\0.\end{cases}
\end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Die oberen rechten Seiten gelten für den asymmetrischen Fall a), die unteren für den symmetrischen Fall b). Daher ist

a) $a_2=A_0$, $a_0=A_2$,
$a_3=-A_1$, $a_1=-A_3$;

b) $a_2=-A_0$, $a_0=-A_2$,
$a_3=A_1$, $a_1=A_3$.

Diese bzw. entsprechend modifizierte Symmetriebedingungen gelten auch für Ziff. 5 und 6. So bestimmt man im Falle a) nach Elimination von A_0 und A_1 die Werte von a_2 und a_3 zu

$$a_2=\frac{2\varrho_1^3(\alpha\eta-\gamma\delta)+3(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\delta-(\varrho_1^2-3\varrho_2^2)\varrho_1\alpha}{2\varrho_1^3(\varepsilon\gamma-\beta\eta)-(\varrho_1^2-\varrho_2^2)(\varrho_1\varrho_2\gamma+3\varepsilon)+(\varrho_1^2-3\varrho_2^2)\varrho_1\beta+(3\varrho_1^2-\varrho_2^2)\varrho_2\eta+2\varrho_2^3},$$

$$a_3=\frac{2\varrho_1^3(\beta\delta-\alpha\varepsilon)+(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\varrho_1\varrho_2\alpha-(3\varrho_1^2-\varrho_2^2)\varrho_2\delta}{2\varrho_1^3(\varepsilon\gamma-\beta\eta)-(\varrho_1^2-\varrho_2^2)(\varrho_1\varrho_2\gamma+3\varepsilon)+(\varrho_1^2-3\varrho_2^2)\varrho_1\beta+(3\varrho_1^2-\varrho_2^2)\varrho_2\eta+2\varrho_2^3}$$

und erhält endlich

$$p(x)=[\alpha+x\delta+(\beta+x\varepsilon)a_2+(\gamma+x\eta)a_3]e^{-\varrho_1 x}+[a_2+a_3 x]e^{\varrho_2 x}. \qquad (41)$$

Im symmetrischen Falle b) ergeben sich dagegen für a_2 und a_3

$$a_2=\frac{2\alpha(\varrho_1\eta-\varrho_2)-\varrho_1\gamma\delta}{(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\gamma+2\varrho_1(\varepsilon\gamma-\beta\eta)+2\varrho_2(1+\beta)-2\varrho_1\eta},$$

$$a_3=\frac{(\varrho_2^2-\varrho_1^2)\alpha+\varrho_1\delta(1+\beta)-2\alpha\varrho_1\varepsilon}{(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\gamma+2\varrho_1(\varepsilon\gamma-\beta\eta)+2\varrho_2(1+\beta)-2\varrho_1\eta}$$

und wegen $a_0=-a_2$ wird jetzt

$$p(x)=[x\delta+(\varepsilon x-1)a_2+x\eta a_3]e^{-\varrho_1 x}+[a_2+a_3 x]e^{\varrho_2 x}. \qquad (42)$$

Statt dessen kann man wegen $a_2=-a_0$ auch von den drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
a_0&=\frac{\alpha+\gamma a_3}{1+\beta},\\
a_1&=\delta-\varepsilon a_0+\eta a_3,\\
(\varrho_1^2-\varrho_2^2)a_0&-2\varrho_1 a_1+2\varrho_2 a_3=0
\end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

ausgehen und erhält schließlich durch die Auflösung nach a_2 und a_3

$$p(x)=\left[\frac{\alpha}{1+\beta}+x a_1+\frac{\gamma}{1+\beta}a_3\right]e^{-\varrho_1 x}+\left[\frac{-\alpha}{1+\beta}+\left(b x+\beta-\frac{\gamma}{1+\beta}\right)a_3\right]e^{\varrho_2 x} \tag{44}$$

mit

$$a_1=\frac{\gamma\delta(\varrho_2^2-\varrho_1^2)-2\varrho_2\delta(1+\beta)+2\varrho_2\alpha\varepsilon+\alpha\eta(\varrho_1^2-\varrho_2^2)}{\gamma(\varrho_2^2-\varrho_1^2)-2\varrho_2(1+\beta)-2\varrho_1\gamma\varepsilon+2\varrho_1\eta+2\varrho_1\eta\beta},$$

$$a_3=\frac{\alpha(\varrho_1^2-\varrho_2^2)-2\varrho_1\delta(1+\beta)+2\varrho_1\alpha\varepsilon}{\gamma(\varrho_2^2-\varrho_1^2)-2\varrho_2(1+\beta)-2\varrho_1\gamma\varepsilon+2\varrho_1\eta+2\varrho_1\eta\beta}.$$

Die Spannungen lassen sich in geschlossener Form anschreiben. Man erhält unter Berücksichtigung der Beziehung $\varrho_1\varrho_2=m^2$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= P_0\sin my\,(-\varrho_1 a_0+a_1-\varrho_1 a_1 x)\,e^{(k-\varrho_1)x-kb}+(\varrho_2 a_2+a_3+\varrho_2 a_3 x)\,e^{(k+\varrho_2)x-kb},\\
\sigma_y &= P_0\sin my\Big\{\Big(\varrho_2 a_0-\Big(\frac{\varrho_2^2}{m^2}+2\Big)a_1+\varrho_2 a_1 x\Big)e^{(k-\varrho_1)x-kb}+\\
&\quad+\Big(-\varrho_1 a_2-\Big(\frac{\varrho_1^2}{m^2}+2\Big)a_3-\varrho_1 a_3 x\Big)e^{(k+\varrho_2)x-kb},\\
\tau_{xy} &= P_0\cos my\Big(ma_0-\frac{1}{m}(\varrho_1+\varrho_2)+ma_1 x\Big)e^{(k-\varrho_1)x-kb}+\\
&\quad+\Big(ma_2+\frac{1}{m}(\varrho_1+\varrho_2)a_3+ma_3 x\Big)e^{(k+\varrho_2)x-kb}.
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

8. Numerischer Vergleich der Verschiebungen und der Spannungsverteilung für Halbebene und Parallelstreifen. Für verschiedene Wellenlängen $l^*=\frac{l}{\lambda/2}$ der sinusförmigen Normalbelastung und verschiedene Exponenten $k^*=kt/\mu^{1/3}$ wurden die maximalen Verschiebungen

$$u^*=\frac{E_r}{P_0}\frac{u}{\lambda/2\sin my},\quad v^*=\frac{E_r}{P_0}\frac{v}{\lambda/2\cos my},\quad \lambda=\begin{cases}2\text{ für die Halbebene,}\\ b\text{ für den Parallelstreifen}\end{cases} \tag{46}$$

und die maximalen Spannungen

$$\sigma^*{}_x=\frac{\sigma_x}{P_0\sin my},\quad \sigma^*{}_y=\frac{\sigma_y}{P_0\sin my},\quad \tau^*{}_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{P_0\cos my} \tag{47}$$

für die Halbebene ($E_r=E_0$) berechnet. Außerdem wurden für einen Parallelstreifen von der Breite $2b$ nach Ziff. 7 u^* und σ_x^* (symmetrischer und asymmetrischer Fall) sowie τ_{xy}^* (asymmetrischer Fall) ermittelt. Diese Werte sind in den Tabellen 1 bis 5 zusammengestellt. Dabei ist $\mu=\frac{E_r}{E_e}$. Die Blechdicke t ist aus Zweckmäßigkeitsgründen (mit Rücksicht auf in einer späteren Arbeit anzugebende Stabilitätsuntersuchungen) schon hier in die numerische Rechnung eingeführt. Außer den Randwerten sind auch die Werte für die Abstände $e=\lambda/2$ und $e=\lambda$ vom Rande berechnet. Wie man aus Tabelle 1, 3 und 5 ersieht, wird die Übereinstimmung zwischen Halbebene und Parallelstreifen um so besser, je kleiner die Wellenlänge und die Entfernung vom Rande ist; denn um so weniger dringen die Deformationen in die Tiefe ein. Die Tabellen schreiten nach $\frac{1}{2}\lambda k^*$ und $l^*=2l/\lambda$ fort, so daß bei verschiedenen λ eine Beziehung auf gleiche Randabstände sofort möglich ist. Aus den entsprechenden Gleichungen ergibt sich, daß $p(x)$, $t(x)$ und somit die Verschiebungsgrößen (46) bei konstantem bk^* und l/b aber variablem b zu b proportional sind, während die Spannungsgrößen (47) nur von λk^* und l/λ abhängen. Die analogen Rechnungen nach Ziff. **5** und **6** wurden im einzelnen nicht ausgeführt. Doch sei bemerkt, daß z. B. zu $k=0{,}8215$ für den Parallelstreifen nach Ziff. **7** die Werte $k=1{,}06205$ nach Ziff. **5** und $k=1{,}05194$ nach Ziff. **6** ein gleiches $(dE/dx)_{\text{Rand}}$ bedingen. Die singulären Stellen der Differentialgleichung (17) in Ziff. **5** liegen also in diesem Falle etwa bei $+i$ und $-i$, für die Differentialgleichung (27) in Ziff. **6** dagegen etwa bei $\pm i\pi/2{,}1$ usw., woraus sich die Wahl geeigneter Stellen x_0, x_1 und

Tabelle 1. *Verschiebungskomponente u^*.*

k^* $\lambda\rightarrow$		0			0,2			1,0			2,0			6,0		
l^*	e	Halbebene	Parallelstreifen		Halbebene	Parallelstreifen		Halbebene	Parallelstreifen		Halbebene	Parallelstreifen		Halbebene	Parallelstreifen	
			sym.	asym.		sym.	asym.		sym.	asym.		sym.	asym.		sym.	asym.
63	0	30,06	2,000	402,3	137,7	2,017	7499	6004	2,310	$4277\cdot10$	$4553\cdot10$	3,090	$1133\cdot10^2$	—	—	—
	$\frac{\lambda}{2}$	29,07	1,001	401,8	136,7	1,011	7498	6003	1,222	$4276\cdot10$	$4553\cdot10$	1,812	$1132\cdot10^2$	—	—	—
	λ	28,11	0	401,3	135,6	0	7497	6002	0	$4276\cdot10$	$4553\cdot10$	0	$1132\cdot10^2$	—	—	—
38,24	0	24,54	2,000	141,5	45,44	2,060	166,9	915,4	2,316	3036	6378	3,099	16845	—	—	—
	$\frac{\lambda}{2}$	23,07	0,999	141,1	44,43	1,055	166,3	914,3	1,226	3035	6377	1,819	16846	—	—	—
	λ	21,68	0	140,9	43,41	0	166,0	913,0	0	3034	6376	0	16869	—	—	—
12,09	0	5,774	1,984	15,49	7,593	1,985	26,09	24,91	2,370	66,08	92,46	3,186	201,3	1777	18,88	1835
	$\frac{\lambda}{2}$	4,839	0,980	14,74	6,631	0,989	25,36	23,84	1,319	65,48	91,29	1,886	200,4	1748	15,73	1834
	λ	4,030	0	14,49	5,750	0	25,09	22,69	0	65,17	89,80	0	200,0	1728	0	1833
5,41	0	2,582	1,796	3,574	2,912	1,881	4,261	4,867	2,336	7,476	9,532	3,545	13,63	84,37	17,81	91,90
	$\frac{\lambda}{2}$	1,725	0,857	2,839	2,030	0,894	3,476	3,892	1,305	6,666	8,438	2,217	12,70	82,84	14,85	89,03
	λ	1,121	0	2,598	1,376	0	3,212	3,021	0	6,370	7,269	0	12,29	80,43	0	87,83
2,21	0	1,054	1,034	1,075	1,106	1,085	1,135	1,353	1,306	1,388	1,828	1,630	1,870	5,224	4,908	5,280
	$\frac{\lambda}{2}$	0,374	0,336	0,413	0,410	0,370	0,458	0,588	0,526	0,640	0,961	0,885	1,033	3,978	3,501	4,319
	λ	0,119	0	0,241	0,136	0	0,274	0,228	0	0,415	0,449	0	0,676	2,830	0	3,591

Tabelle 2. *Verschiebungskomponente $-v^*$.*

k^* $\lambda\rightarrow$		0	0,2	1,0	2,0	6,0
l^*	e	Halbebene				
63	0	0	0	0	0	—
	$\frac{\lambda}{2}$	0,476	4,642	289,5	2249	—
	λ	0,905	9,068	575,6	4483	—
38,24	0	0	0	0	0	0
	$\frac{\lambda}{2}$	0,461	2,011	69,42	509,8	8157
	λ	0,848	3,823	136,2	1011	12300
12,09	0	0	0	0	0	0
	$\frac{\lambda}{2}$	0,385	0,642	5,308	19,05	433,1
	λ	0,599	1,029	6,850	35,39	834,5
5,41	0	0	0	0	0	0
	$\frac{\lambda}{2}$	0,280	0,360	0,938	2,669	39,11
	λ	0,313	0,418	1,244	3,951	68,69
2,21	0	0	0	0	0	0
	$\frac{\lambda}{2}$	0,120	0,137	0,224	0,436	2,738
	λ	0,058	0,068	0,131	0,305	2,858

Tabelle 3. *Spannungskomponente* σ_x^* .

k^* $\lambda\rightarrow$		0			0,2			1,0			2,0			6,0		
l^*	e	Halbebene	Parallelstreifen		Halbebene	Parallelstreifen		Halbebene	Parallelstreifen		Halbebene	Parallelstreifen		Halbebene	Parallelstreifen	
			sym.	asym.		sym.	asym.		sym.	asym.		sym.	asym.		sym.	asym.
63	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	—	—	—
	$\frac{\lambda}{2}$	0,975	0,999	0,500	0,947	0,969	0,500	0,796	0,860	0,415	0,619	0,704	0,357	—	—	—
	λ	0,950	0,999	0	0,895	0,920	0	0,615	0,653	0	0,350	0,391	0	—	—	—
38,24	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	—	—	—
	$\frac{\lambda}{2}$	0,959	0,999	0,499	0,933	0,955	0,494	0,792	0,847	0,400	0,617	0,692	0,348	—	—	—
	λ	0,918	0,999	0	0,868	0,910	0	0,607	0,612	0	0,348	0,381	0	—	—	—
12,09	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	$\frac{\lambda}{2}$	0,871	0,991	0,496	0,850	0,948	0,490	0,741	0,798	0,386	0,591	0,683	0,342	0,185	0,593	0,145
	λ	0,749	0,987	0	0,709	0,881	0	0,525	0,577	0	0,315	0,370	0	0,023	0,174	0
5,41	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	$\frac{\lambda}{2}$	0,721	0,886	0,485	0,703	0,863	0,470	0,620	0,777	0,361	0,508	0,653	0,334	0,171	0,550	0,083
	λ	0,494	0,841	0	0,466	0,770	0	0,352	0,567	0	0,225	0,331	0	0,020	0,166	0
2,21	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	$\frac{\lambda}{2}$	0,412	0,482	0,370	0,400	0,465	0,359	0,352	0,445	0,333	0,298	0,371	0,278	0,113	0,175	0,080
	λ	0,140	0,279	0	0,131	0,231	0	0,098	0,163	0	0,006	0,140	0	0,008	0,047	0

Tabelle 4. *Spannungskomponente* $-\sigma_y^*$.

k^* $\lambda\rightarrow$		0	0,2	1,0	2,0	6,0
l^*	e	Halbebene				
63	0	0	0	0	0	0
	$\frac{\lambda}{2}$	0,024	0,213	9,581	49,35	—
	λ	0,045	0,383	12,63	43,27	—
38,24	0	0	0	0	0	—
	$\frac{\lambda}{2}$	0,038	0,152	3,754	18,41	—
	λ	0,075	0,266	4,900	16,06	—
12,09	0	0	0	0	0	0
	$\frac{\lambda}{2}$	0,100	0,153	0,669	2,182	9,652
	λ	0,154	0,227	0,783	1,778	1,568
5,41	0	0	0	0	0	0
	$\frac{\lambda}{2}$	0,162	0,193	0,361	0,682	1,932
	λ	0,182	0,206	0,318	0,444	0,294
2,21	0	0	0	0	0	0
	$\frac{\lambda}{2}$	0,172	0,179	0,212	0,273	0,331
	λ	0,083	0,083	0,084	0,084	0,029

Tabelle 5. *Spannungskomponente* τ^*_{xy}.

k^* $\lambda\to$		0		0,2		1,0		2,0		6,0	
l^*	e	Halbebene	Parallelstreifen asym.	Halbebene	Parallelstreifen asym.	Halbebene	Parallelstreifen asym.	Halbebene	Parallelstreifen asym.	Halbebene	Parallelstreifen asym.
63	0	0,500	10,02	1,059	11,02	4,176	16,08	8,262	21,92	—	—
	$\frac{\lambda}{2}$	0,499	10,02	1,054	10,57	3,900	12,67	6,609	13,76	—	—
	λ	0,497	10,02	1,039	9,031	3,327	6,480	4,207	4,640	—	—
38,24	0	0,500	6,045	0,809	6,921	2,596	7,914	5,046	8,511	—	—
	$\frac{\lambda}{2}$	0,498	6,040	0,802	6,089	2,418	6,567	4,027	6,036	—	—
	λ	0,494	6,038	0,785	5,321	2,050	3,834	2,553	3,097	—	—
12,09	0	0,500	1,928	0,585	2,074	1,033	2,257	1,726	2,876	4,796	4,626
	$\frac{\lambda}{2}$	0,485	1,925	0,563	1,999	0,928	1,867	1,009	1,775	1,386	1,461
	λ	0,452	1,922	0,512	1,770	0,732	1,069	0,802	0,928	0,810	0,863
5,41	0	0,500	0,880	0,536	0,972	0,707	1,080	0,965	1,322	2,233	2,406
	$\frac{\lambda}{2}$	0,442	0,849	0,467	0,894	0,566	0,910	0,667	0,871	0,599	0,703
	λ	0,338	0,827	0,346	0,773	0,361	0,463	0,332	0,402	0,078	0,169
2,21	0	0,500	0,522	0,514	0,541	0,577	0,582	0,677	0,678	1,095	1,128
	$\frac{\lambda}{2}$	0,292	0,333	0,293	0,334	0,295	0,322	0,304	0,310	0,199	0,205
	λ	0,112	0,227	0,108	0,199	0,093	0,137	0,076	0,086	0,015	0,018

die Zusammensetzung der vier Fundamentalsysteme nach Abb. 5 ergibt. Von den beiden langwierigen Rechnungsgängen in Ziff. **5** und **6** ist der in Ziff. **5** immerhin bequemer. Die nach Ziff. **6** erhaltenen Werte sind zudem, wie die Durchrechnung eines Zahlenbeispiels zeigte, oft unsicher, da sie sich u. a. als Differenzen großer Zahlen ergeben.

In allen Fällen zeigt sich, daß für $k^*>1$ und größere Wellenlängen die Verschiebungen und Spannungen schnell sehr beträchtliche Werte annehmen, so daß für praktisch vorkommende Verhältnisse nur kleinere k^*-Werte in Frage kommen.

(Eingegangen am 25. Juni 1947.)

Der Einfluß der Trägheitskräfte bei der hydrodynamischen Schmiermitteltheorie*.

Von W. Kahlert in Wuppertal-Barmen.

1. Übersicht und Aufgabenstellung. Die Theorie der Schmiermittelreibung wurde begründet von *O. Reynolds*[1] und *A. Sommerfeld*[2,3] und verbessert durch *Gümbel*[4]. Die Theorie ging von der Voraussetzung aus, daß die Trägheitskräfte in der zähen Schmiermittelschicht vernachlässigbar klein sind, und man konnte damit die Bewegungsgleichungen der zähen Flüssigkeiten für den unendlich breiten Gleitschuh und das unendlich breite Zapfenlager geschlossen integrieren. Durch weitere Integration der erhaltenen Geschwindigkeits- und Druckverteilungen bekam man die gesuchten Belastungs- und Reibungsgrößen. Für die Praxis wichtig war die Erweiterung der Theorie auf endlich breite Lager, die zuerst von *Michell*[5] für einen ebenen Gleitschuh durchgeführt wurde und auf unbequeme *Bessel*sche Funktionen führte. Später hat *Schiebel*[6] das *Ritz*sche Verfahren der Variationsrechnung auf dieses Problem angewandt und bekam eine verhältnismäßig einfache Näherungslösung, indem er parabolische Druckverteilung über die Lagerbreite annahm. *Vogelpohl*[7] baute dieses Verfahren aus, indem er für die Druckverteilung eine Fourier-Reihe ansetzte und die ersten Glieder ausrechnete. Weiter hat *Frössel*[8] das Problem des endlichen Gleitlagers aufgegriffen. Seine Reihenansätze führten auf *Bessel*sche Funktionen; die Lösungen für den ebenen und balligen Gleitschuh hat er zum praktischen Gebrauch in handlichen Tabellen zusammengestellt. Zuletzt hat *Bauer*[9] seine Ergebnisse, die er wieder mit Hilfe der Variationsrechnung erhielt, in Schaubildern zusammengefaßt, die unmittelbar zur praktischen Lagerberechnung dienen können. Einen Überblick über den damaligen Stand der Theorie gibt auch *W. Stieber*[10].

Die Kritik setzte bei der Voraussetzung ein, daß die Schmiermittelzähigkeit μ konstant sei. Tatsächlich treten aber, wie *Vogelpohl*[7] und *Nahme*[11] nachwiesen, in dem engen Schmierspalt erhebliche Temperaturdifferenzen und davon abhängige Zähigkeitsunterschiede auf. *Vogelpohl* konnte nun in der angeführten Arbeit zeigen, daß auch bei Berücksichtigung veränderlicher Zähigkeit innerhalb der sonstigen Vernachlässigungen die grundlegende *Reynolds*sche Differentialgleichung unverändert erhalten bleibt. Die Integration kann dann allerdings nicht mehr geschlossen durchgeführt werden.

Eine andere Frage ist nun, ob die Vernachlässigung der Trägheitsglieder immer zulässig ist. Dies ist offenbar nur so lange der Fall, wie die Druckunterschiede infolge der Trägheitskräfte klein sind gegenüber den von den Reibungskräften verursachten. Bei einer Umfangsgeschwindigkeit von 80 m/sec., wie sie bei neueren schnellaufenden Maschinen vorkommt, hat aber der Staudruck die Größenordnung von 30 kg/cm² und wird damit größer als die mittlere spezifische Lagerbelastung (Flächenpressung) bei solchen Fällen. Die Vernachlässigung der Trägheitskräfte ist hier also nicht mehr zulässig, worauf schon *Vogelpohl*[7] hingewiesen hat. Es wurde deshalb versucht, die Theorie der Schmiermittelreibung unter Berücksichtigung der Trägheitsglieder in den hydrodynamischen Bewegungsgleichungen weiter auszubauen. Die Rechnungen wurden

---

* Gekürzte Wiedergabe der Dissertation Braunschweig, 1946. (Berichter: Prof. Dr. *H. Schlichting* und Prof. Dr.-Ing. *K. Pfleiderer*.) Eine ausführliche Fassung kann bei der Technischen Hochschule Braunschweig eingesehen werden.

[1] *O. Reynolds*, Über die Theorie der Schmierung. Philos. Trans. Roy. Soc., I. Teil (1886).

[2] *A. Sommerfeld*, Z. Math. Phys. 50 (1904), S. 97.

[3] *A. Sommerfeld*, Z. Techn. Phys. 2 (1921), S. 58.

[4] *Gümbel-Everling*, Reibung und Schmierung im Maschinenbau. Berlin 1925.

[5] *A. G. M. Michell*, Die Schmierung ebener Flächen. Z. Math. Phys. 52 (1905), S. 123.

Die in [1], [2], [3] und [5] angeführten Arbeiten finden sich in Nr. 218 von *Ostwalds* Klassikern: Hydrodynamische Theorie der Schmiermittelreibung; herausgg. von L. Hopf. Leipzig 1927.

[6] *A. Schiebel*, Die Gleitlager. Berlin 1933.

[7] *G. Vogelpohl*, Beiträge zur Kenntnis der Gleitlagerreibung. VDI.-Forschungsheft 386 (1937); vgl. auch Ing.-Arch. 14 (1943), S. 192.

[8] *W. Frössel*, Z. angew. Math. Mech. 21 (1941) S. 321.

[9] *K. Bauer*, Forsch. a. d. Geb. d. Ing.-Wes. 14 (1943) S. 48.

[10] *W. Stieber*, Das Schwimmlager, Berlin 1933.

[11] *R. Nahme*, Ing.-Arch. 11 (1940) S. 191.

nach einem Iterationsverfahren durchgeführt, welches von den klassischen Lösungen der reinen Zähigkeitsströmung ausging. Die Korrekturen wurden für die theoretisch wichtigsten Fälle bestimmt, und zwar für den unendlich breiten ebenen Gleitschuh und für das unendlich breite Zapfenlager. Die Integrationen ließen sich geschlossen durchführen. Es werden jeweils die Ergebnisse der klassischen Theorie zusammengestellt (Abschn. 2 und 6) und dann Druckverteilung, Tragkraft, Reibungswiderstand und Reibungskoeffizient der Korrekturlösung angegeben sowie beim Gleitschuh die Verlagerung des Druckpunktes und beim Zapfenlager die Verlagerung des Wellenmittelpunktes untersucht (Abschn. 4, 5 und 7).

2. Die Bewegungsgleichungen und die Lösungen der klassischen Theorie für den ebenen Gleitschuh. Die Mechanik der Strömung zäher Flüssigkeiten geht von den *Navier-Stokes*schen Differentialgleichungen aus. Diese Gleichungen setzen die auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte miteinander ins Gleichgewicht, also einerseits die Trägheits- und andererseits die Druck- und Reibungskräfte. Sie lauten allgemein für die stationäre Bewegung inkompressibler Flüssigkeiten im ebenen (zweidimensionalen) Fall bei konstanter, d. h. von der Temperatur unabhängiger Zähigkeit

$$\left.\begin{aligned} \varrho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\\ \varrho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (2,1)$$

Dazu kommt die Kontinuitätsbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\,. \qquad (2,2)$$

Hierin sind x und y die Koordinaten eines rechtwinkligen Koordinatensystems und u und v die zu diesen Richtungen gehörenden Geschwindigkeitskomponenten; p ist der Druck in der Strömung; ϱ bedeutet die Dichte und μ die Zähigkeit des strömenden Mediums ($\nu=\mu/\varrho$ = kinematische Zähigkeit). Exakte Lösungen dieser Gleichungen kennt man nur für wenige Fälle; meist ist man auf Näherungslösungen angewiesen, die von gewissen begründeten Vereinfachungen in diesen Differentialgleichungen ausgehen.

Auf einer solchen Näherungsrechnung beruht die bekannte Theorie der Schmiermittelreibung von *Reynolds* und *Sommerfeld*. Da sich im Schmierkeil eine überwiegend zähe Strömung bei verhältnismäßig kleinen Geschwindigkeiten ausbildet, hat man angenommen, daß die Trägheitskräfte gegenüber den Reibungs-(Zähigkeits-)kräften vernachlässigbar klein bleiben und setzte demgemäß die linken Seiten der *Navier-Stokes*schen Differentialgleichungen einfach gleich Null. Da weiterhin im Schmierkeil die y-Erstreckung von der Größenordnung der Schmierschichtdicke h gegenüber den x-Dimensionen von der Größenordnung der Schmierkeillänge l sehr klein ist, darf man annehmen, daß in y-Richtung kein Druckgefälle vorhanden ist, also der Gradient $\partial p/\partial y$ und damit die ganze zweite Gleichung verschwindet. Die Ableitung $\partial^2 u/\partial x^2$ ist gegen $\partial^2 u/\partial y^2$ von der Größenordnung $(h/l)^2$ und wird auch vernachlässigt. Man erhielt so die Grundgleichung für die klassische Theorie (Index 1) der Strömung im unendlich breiten Schmierkeil

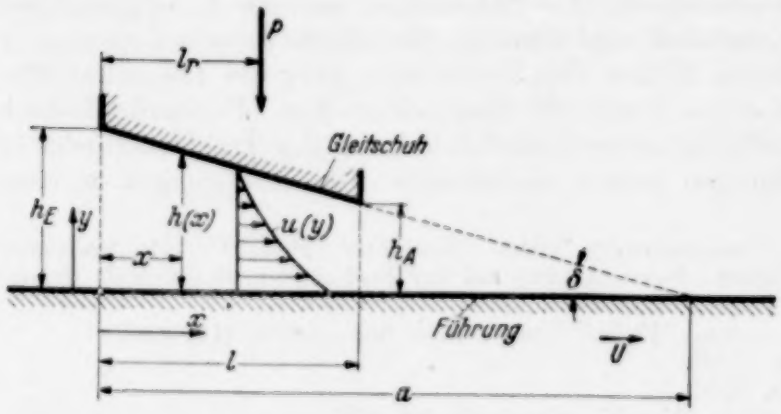

Abb. 1. Größen am ebenen Gleitschuh.

$$\frac{d^2 u_1}{d y^2}=\frac{1}{\mu}\frac{d p_1}{d x}\,. \qquad (2,3)$$

Hierzu gehören die Randbedingungen, daß die Flüssigkeit an den Wänden haftet, also (vgl. Abb. 1)

$$u_1=U \quad \text{für} \quad y=0\,, \quad u_1=0 \quad \text{für} \quad y=h\,.$$

Dabei ist U die Relativgeschwindigkeit der Schmierflächen gegeneinander, in dem angenommenen Koordinatensystem Geschwindigkeit der Führung bei festgehaltenem Gleitschuh, und h die

Schmierschichtdicke. Die andere Gleichung für die beiden Unbekannten u_1 und p_1 folgt aus der Kontinuitätsbedingung

$$\int_0^h u_1(x, y)\, dy = Q_1 = \text{konst}. \tag{2, 4}$$

Durch zweimalige Integration von (2, 3) folgte die Geschwindigkeitsverteilung im Schmierspalt

$$u_1 = U\left(1 - \frac{y}{h}\right) - \frac{1}{2\mu}\frac{dp_1}{dx}\, y\, h\left(1 - \frac{y}{h}\right), \tag{2, 5}$$

und unter Berücksichtigung von (2, 4) der Druckgradient

$$\frac{dp_1}{dx} = 6\mu U \frac{h - h_0}{h^3}. \tag{2, 6}$$

Hierin ist h_0 eine Integrationskonstante und bedeutet die Schmierschichtdicke an der Stelle des Druckmaximums. Zu dieser Gleichung gehören die Randbedingungen, daß der Druck am Anfang und am Ende des Schmierkeils gleich ist:

$$p_1 = p_0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = 1.$$

Gleichung (2, 6) konnte in den allgemeinen Fällen des ebenen, unendlich breiten Gleitschuhs und des unendlich breiten Zapfenlagers explizit integriert werden.

Die Lösungen der ersten Näherung für den ebenen Gleitschuh seien hier zusammengestellt[1], [2]. Dabei sei

$$k = \frac{a}{l} \tag{2, 7}$$

der dimensionslose Parameter für die Neigung der Schmierflächen gegeneinander, wenn a gemäß Abb. 1 den Abstand der Spur der Gleitschuhebene auf der Führungsebene vom Koordinatenursprung und l die Gleitschuhlänge bedeutet. Die Größe k kann also variieren zwischen 1, wenn die Gleitschuhhinterkante auf der Führung schleift, und unendlich, wenn Gleitschuh und Führungsebene parallel sind. Ferner sei

$$\xi = \frac{x}{l} \tag{2, 8}$$

die dimensionslose x-Koordinate, laufend von 0 am Schmierkeileintritt bei der Schmierschichtdicke h_E bis 1 am Schmierkeilaustritt bei der Schmierschichtdicke h_A. Durch Integration des Druckgradienten (2, 6) folgt mit der Integrationskonstanten

$$h_0 = 2\frac{h_E h_A}{h_E + h_A} \tag{2, 9}$$

die Druckverteilung im ebenen Schmierkeil

$$\left.\begin{aligned} p_1(\xi; k) &= \int_0^x \frac{dp_1}{dx}\, dx = \frac{\mu U l}{h_E^2} f_1(\xi; k), \\ \text{mit} \quad f_1(\xi; k) &\equiv \frac{6k^2}{2k-1}\,\frac{\xi(1-\xi)}{(k-\xi)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{2, 10}$$

und durch weitere Integrationen die Tragkraft der Breiteneinheit

$$\left.\begin{aligned} P_1(k) &= \int_0^l p_1(x; k)\, dx = \frac{\mu U l^2}{h_E^2} F_1(k) = \frac{\mu U l^2}{h_A^2} F_1^*(k), \\ \text{mit} \quad F_1(k) &\equiv 6k^2\left(ln\,\frac{k}{k-1} - \frac{2}{2k-1}\right), \\ \text{und} \quad F_1^*(k) &\equiv 6(k-1)^2\left(ln\,\frac{k}{k-1} - \frac{2}{2k-1}\right), \end{aligned}\right\} \tag{2, 11}$$

wie auch das Lastmoment der Breiteneinheit

$$\left.\begin{aligned} M_1(k) &= \int_0^l p_1(x, k)\, x\, dx = \frac{\mu U l^3}{h_E^2} G_1(k), \\ \text{mit} \quad G_1(k) &= \frac{6k^2}{2k-1}\left[\frac{1}{2} - 3k + (3k^2 - 2k)\, ln\,\frac{k}{k-1}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2, 12}$$

[1] *W. Frössel*, Forsch. a. d. Geb. d. Ing.-Wes. 9 (1938), S. 261.
[2] *H. Schlichting*, Vorlesung Strömungslehre II, Sommersemester 1946.

Die Tragfähigkeit hat[1] bei festgehaltener Austrittshöhe ein Maximum bei $k=1{,}85$ von der Größe $P_{max}=0{,}16\,\mu U\,(l/h_A)^2$. Sie verschwindet natürlich für $k=\infty$, da sich zwischen den parallelen Wänden kein Druckgradient ausbilden kann, wenn $p=p_0$ bei $x=0$ und $x=1$ vorgeschrieben wird. Aus (2, 11) und (2, 12) läßt sich die Druckpunktlage bestimmen (l_r = Hebelarm der Last, bezogen auf den Koordinatenursprung):

$$\left[\frac{l_r}{l}\right]_1 = \frac{G_1(k)}{F_1(k)} = \frac{\frac{1}{2} - 3k + (3k^2 - 2k)\,ln\,\frac{k}{k-1}}{(2k-1)\left(ln\,\frac{k}{k-1} - \frac{2}{2k-1}\right)}\,. \tag{2, 13}$$

Die Schubspannung ist mit der Definitionsgleichung der Zähigkeit

$$\tau = \mu\,\frac{\partial u}{\partial y}\,. \tag{2, 14}$$

Nach Differentiation der Geschwindigkeit (2, 5) wird die Schubspannung an der Führung (Gleitschuh)

$$\left.\begin{aligned} \tau_{01}(\xi;k) &= \mu\left[\frac{\partial u_1}{\partial y}\right]_{y=0} = -\frac{\mu U}{h_E}\;b_1(\xi;k)\,, \\ \text{mit}\quad b_1(\xi;k) &\equiv \frac{4}{1-\xi/k} - 6\,\frac{k-1}{2k-1}\;\frac{1}{(1-\xi/k)^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2, 15}$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, daß die Schubspannung der Geschwindigkeit U entgegengesetzt gerichtet ist. Integriert man (2, 15) über die ganze Gleitschuhlänge, so erhält man die Reibungskraft der Breiteneinheit (positiv definiert, wenn Bewegung gehemmt wird)

$$\left.\begin{aligned} T_1(k) &= -\int_0^l \tau_{01}(x,k)\,dx = \frac{\mu U l}{h_E}\;W_1(k)\,, \\ \text{mit}\quad W_1(k) &\equiv 2k\left\{2\,ln\,\frac{k}{k-1} - \frac{3}{2k-1}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{2, 16}$$

Aus (2,16 und (2,11) errechnet sich der Reibungskoeffizient

$$w_1(k) = \frac{T_1(k)}{P_1(k)} = \frac{h_E}{l}\,\frac{W_1(k)}{F_1(k)} = \frac{h_E}{l}\,\frac{1}{3k}\,\frac{2\,ln\,\frac{k}{k-1} - \frac{3}{2k-1}}{ln\,\frac{k}{k-1} - \frac{2}{2k-1}}\,. \tag{2, 17}$$

3. Die Methode der Korrekturlösung. Untersucht man die Vernachlässigung der Trägheitsglieder, so kommt man zu folgender Abschätzung: Das Trägheitsglied $\varrho\,u\,\partial u/\partial x$ ist von der Größenordnung $\varrho\,U^2/l$, das Reibungsglied $\mu\,\partial^2 u/\partial y^2$ von der Größenordnung $\mu\,U/h^2$. Man hat also

$$\frac{\text{Trägheitsglied}}{\text{Reibungsglied}} = \frac{\varrho\,\frac{U^2}{l}}{\mu\,\frac{U}{h^2}} = \frac{Ul}{\nu}\left(\frac{h}{l}\right)^2. \tag{3,1}$$

Die in der klassischen Theorie ausgeführte Vernachlässigung der Trägheitsglieder gegenüber den Reibungsgliedern ist also zulässig, wenn die charakteristische, der *Reynolds*schen Zahl $Re=Ul/\nu$ verwandte Zahl des Lagers

$$Re^* = \frac{Ul}{\nu}\left(\frac{h}{l}\right)^2 \ll 1\,. \tag{3, 2}$$

In vielen in der Praxis vorkommenden Fällen ist nun Re^* tatsächlich sehr klein. Wendet man jedoch hohe Gleitgeschwindigkeiten an (nach *Vogelpohl* bis 100 m/sec), und treten hohe Lagertemperaturen auf, wodurch die Zähigkeit des Schmiermittels stark verringert wird, so wächst Re^* sehr wohl in die Größenordnung von 1 und kann Werte bis zu $Re^*=5$ und darüber annehmen. Beispielsweise berechnet *Schiebel* ein Zapfenlager mit folgenden Daten: Durchmesser $d=0{,}2$ m; Lagerspiel $\frac{D-d}{d}=0{,}0017$; Drehzahl $n=6000$ U/min, entspr. $U=\frac{n\pi d}{60}=62{,}8$ m/sec; Öltemperatur 80° entspr. $\mu=0{,}7\cdot10^{-3}\,\frac{\text{kg sec}}{\text{m}^2}$, also mit $\varrho=98\,\frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}^4}$ $\nu=\frac{\mu}{\varrho}=0{,}714\cdot10^{-5}$ m²/sec. Damit errechnet sich

$$Re^* = \frac{Ud}{\nu}\left(\frac{D-d}{d}\right)^2 = 5{,}09\,.$$

[1] Vgl. *Schiebel*, a. a. O. S. 16.

In solchen Fällen ist also die Voraussetzung der alten Theorie nicht mehr gegeben, und man muß versuchen, auch die Trägheitskräfte in den Bewegungsgleichungen zu berücksichtigen. Dies läßt sich mit einem Iterationsverfahren durchführen, das hier angewandt ist.

Ähnlich wie *Riegels*[1] es für die *Hele-Shaw*-Strömung gezeigt hat, geht man von den bekannten Lösungen der trägheitslosen Strömung als erster Näherung aus. Man errechnet mit den erhaltenen Werten für die Geschwindigkeiten und ihre Ableitungen die bisher vernachlässigten Trägheitsglieder in den *Navier-Stokes*schen Differentialgleichungen und kann mit diesen Größen, gleichsam als bekannten eingeprägten Kräften, eine Korrekturströmung berechnen, die durch diese Kräfte hervorgerufen wird. Da man die Korrekturströmung selbst wieder als trägheitslos annimmt, d. h. ihre quadratischen Glieder vernachlässigt — die Korrekturströmung ist ja um eine Größenordnung kleiner als die Strömung der ersten Näherung —, erhält man Gleichungen, in denen neben Reibungs- und Druckgliedern nur bekannte Größen auftreten. Diese Gleichungen lassen sich integrieren. Die Lösungen der Korrektur erweisen sich als direkt proportional der Re^*-Zahl. Mit der ersten Näherung läßt sich die Korrekturströmung zur zweiten Näherung zusammensetzen, die das gesuchte verbesserte Bild der wirklichen Verhältnisse gibt.

4. Druckgradient und Geschwindigkeit in der Korrekturlösung. Bezeichnet man die Größen der zweiten Näherung mit dem Index 2, so besteht das angedeutete Iterationsverfahren in der Lösung der Differentialgleichung

$$\varrho\left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)=-\frac{dp_2}{dx}+\mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \tag{4,1}$$

mit den Randbedingungen

$$u_2=U \text{ für } y=0,\quad u_2=0 \text{ für } y=h,\quad p_2=p_0 \text{ für } x=0 \text{ und } x=l.$$

Die linke Seite von (4,1) ist die Trägheitskraft, die von der Strömung der ersten Näherung herrührt; die rechte Seite setzt Druck und Geschwindigkeit der gedachten Korrekturströmung zueinander in Beziehung. Die Gleichung entspricht der Gleichung (2,3) in der ersten Näherung. Die zugehörige Kontinuitätsgleichung lautet analog (2,4)

$$\int_0^h u_2(x,y)\,dy=Q_2=\text{konst}. \tag{4,2}$$

Versieht man die Größen der Korrekturströmung mit dem Index K und setzt

$$u_2=u_1+u_K,\quad p_2=p_1+p_K, \tag{4,3}$$

so läßt sich (4,1) in der Form schreiben

$$\varrho\left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)=-\frac{dp_K}{dx}+\mu\frac{\partial^2 u_K}{\partial y^2} \tag{4,4}$$

mit den Randbedingungen

$$u_K=0 \text{ für } y=0 \text{ und } y=h,$$
$$p_K=0 \text{ für } x=0 \text{ und } x=l,$$

weil die Forderungen bestehen bleiben, daß 1) die Flüssigkeit an den Wänden haftet, und 2) der Druck am Schmierkeileintritt gleich dem am Schmierkeilaustritt wird und z. B. am Gleitschuh hier verschwindet. Die Kontinuitätsgleichung für die Korrekturströmung lautet

$$\int_0^h u_K(x,y)\,dy=Q_K=\text{konst}. \tag{4,5}$$

Die Klammer der linken Seite von (4,4), also die Trägheitskraft, errechnet sich aus der Kontinuitätsgleichung (2,2) und der Geschwindigkeit (2,5) und deren Ableitungen, wenn man kurz schreibt

$$\frac{dh}{dx}=h' \tag{4,6}$$

und

$$\frac{y}{h}=\eta \text{ (dimensionslos)}. \tag{4,7}$$

zu

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}=\frac{U^2h'}{h}\left[K_1(h)\,\eta+K_2(h)\,\eta^2+K_3(h)\,\eta^3+K_4(h)\,\eta^4\right] \tag{4,8}$$

[1] *F. Riegels*, Z. angew. Math. Mech. 18 (1938) S. 95.

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} K_1(h) &\equiv -6\frac{h_0}{h}+4\,,\\ K_2(h) &\equiv -9\left(\frac{h_0}{h}\right)^2+27\frac{h_0}{h}-14\,,\\ K_3(h) &\equiv 18\left(\frac{h_0}{h}\right)^2-36\frac{h_0}{h}+16\,,\\ K_4(h) &\equiv -9\left(\frac{h_0}{h}\right)^2+15\frac{h_0}{h}-6\,. \end{aligned}\right\} \tag{4,9}$$

Die Grundgleichung der Korrekturströmung läßt sich nun mit den Randbedingungen $u_K=0$ für $y=0$ und $y=h$ (Haften der Schmierflüssigkeit an den Wänden!) integrieren zur Geschwindigkeit

$$u_K=\frac{1}{2\mu}\frac{dp_K}{dx}h^2\eta\,(\eta-1)+\frac{U^2hh'}{\nu}\eta\left[\frac{K_1}{6}(\eta^2-1)+\frac{K_2}{12}(\eta^3-1)+\frac{K_3}{20}(\eta^4-1)+\frac{K_4}{30}(\eta^5-1)\right]. \tag{4,10}$$

Die weitere Integration gemäß der Kontinuitätsgleichung (4,5) liefert den hier auftretenden Druckgradienten

$$\frac{dp_K}{dx}=-12\,\mu\,Q_K\frac{1}{h^3}-\frac{3\mu U^2}{\nu}\left[\frac{K_1(h)\,h'}{6\,h}+\frac{K_2(h)\,h'}{10\,h}+\frac{K_3(h)\,h'}{15\,h}+\frac{K_4(h)\,h'}{21\,h}\right]. \tag{4,11}$$

Hier ist noch die Durchflußmenge Q_K unbekannt. Man findet sie durch bestimmte Integration dieser letzten Gleichung (4,11) mit den Randbedingungen für den Druck, der ja am Einlauf des Schmierkeils ($x=0$) und am Auslauf ($x=l$) verschwinden soll:

$$\left.\begin{aligned} p_K(l)-p_K(0)=\int_0^l\frac{dp_K}{dx}\,dx=-12\,\mu\,Q_K\int_0^l\frac{dx}{h^3}-3\varrho\,U^2\Big[\frac{1}{6}\int_0^l\frac{K_1h'}{h}\,dx+\frac{1}{10}\int_0^l\frac{K_2h'}{h}\,dx+\\ +\frac{1}{15}\int_0^l\frac{K_3h'}{h}\,dx+\frac{1}{21}\int_0^l\frac{K_4h'}{h}\,dx\Big]=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{4,12}$$

Bei Ausführung der Integration sind nun die speziellen geometrischen Verhältnisse zu berücksichtigen, die durch die Funktion der Schmierschichtdicke $h=h(x)$ gegeben sind. Es sei zuerst der Fall des unendlich breiten, ebenen Gleitschuhs behandelt.

5. Gleitschuh bei Berücksichtigung der Trägheitskräfte. Beim ebenen Gleitschuh verläuft die Schmierschichtdicke

$$h=h_E+\beta x \tag{5,1}$$

linear. Ihre Neigung

$$\frac{dh}{dx}=h'=\frac{h_A-h_E}{l}=\beta \tag{5,2}$$

ist konstant und mit den festgelegten Bezeichnungen negativ, da die Schmierschichtdicke in positiver x-Richtung abnimmt. Sie kann daher vor die Integrale treten, und man erhält aus (4, 11) und (4, 12) den Druckgradienten

$$\frac{dp_K}{dx}=\frac{\varrho\,U^2(h_E-h_A)}{l}\left(\frac{H}{h^3}+\frac{K_1}{2\,h}+\frac{K_2}{^{10}/_3\,h}+\frac{K_3}{5\,h}+\frac{K_4}{7\,h}\right) \tag{5, 3}$$

mit

$$H=\frac{12}{35}h_0^2-\frac{2}{7}\frac{h_E^2\,h_A^2}{h_E^2-h_A^2}\ln\frac{h_E}{h_A}\,. \tag{5, 4}$$

Die Abkürzung H hängt nur von der geometrischen Lage des Gleitschuhs zur Führung ab und hat die Dimension einer Fläche. Man erkennt, daß $dp_K/dx\sim\varrho\,U^2/l$, somit $p_K\sim\varrho\,U^2$ ist. Die Korrektur des Druckes ist also als reines Trägheitsglied proportional dem Staudruck der Gleitgeschwindigkeit.

Geht man mit (5,3) in (4,10) ein und bildet die für den Gleitschuh charakteristische Re^*-Zahl von (3,2) mit der Eintrittshöhe h_E des Schmierkeils

$$Re_s^*=\frac{Ul}{\nu}\left[\frac{h_E}{l}\right]^2, \tag{5, 5}$$

so wird mit dem Parameter $k = {}^{a}/_{l}$ von (2,7) und der dimensionslosen Veränderlichen $\xi = \frac{x}{l}$ von (2,8) die Geschwindigkeitsverteilung im Schmierkeil

$$\frac{u_K}{U} = -Re_s^* \left(\frac{1}{k} - \frac{\xi}{k^2}\right) \eta \left\{ (1-\eta) \frac{(k-1)^2}{(2k-1)\left(1-\frac{\xi}{k}\right)^2} \left[\frac{24}{35} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{7} ln' \frac{k}{k-1} \right] + \right.$$
$$\left. + (1-\eta)\left[\frac{K_1}{4} + \frac{K_2}{20/3} + \frac{K_3}{10} + \frac{K_4}{14}\right] - \frac{K_1}{6}(1-\eta^2) - \frac{K_2}{12}(1-\eta^3) - \frac{K_3}{20}(1-\eta^4) - \frac{K_4}{30}(1-\eta^5) \right\}, \tag{5,6}$$

wobei die K-Werte Funktionen von

$$\frac{h_0}{h} = 2 \frac{k-1}{2k-1} \frac{1}{1-\xi/k} \tag{5,7}$$

nach (4,9) sind.

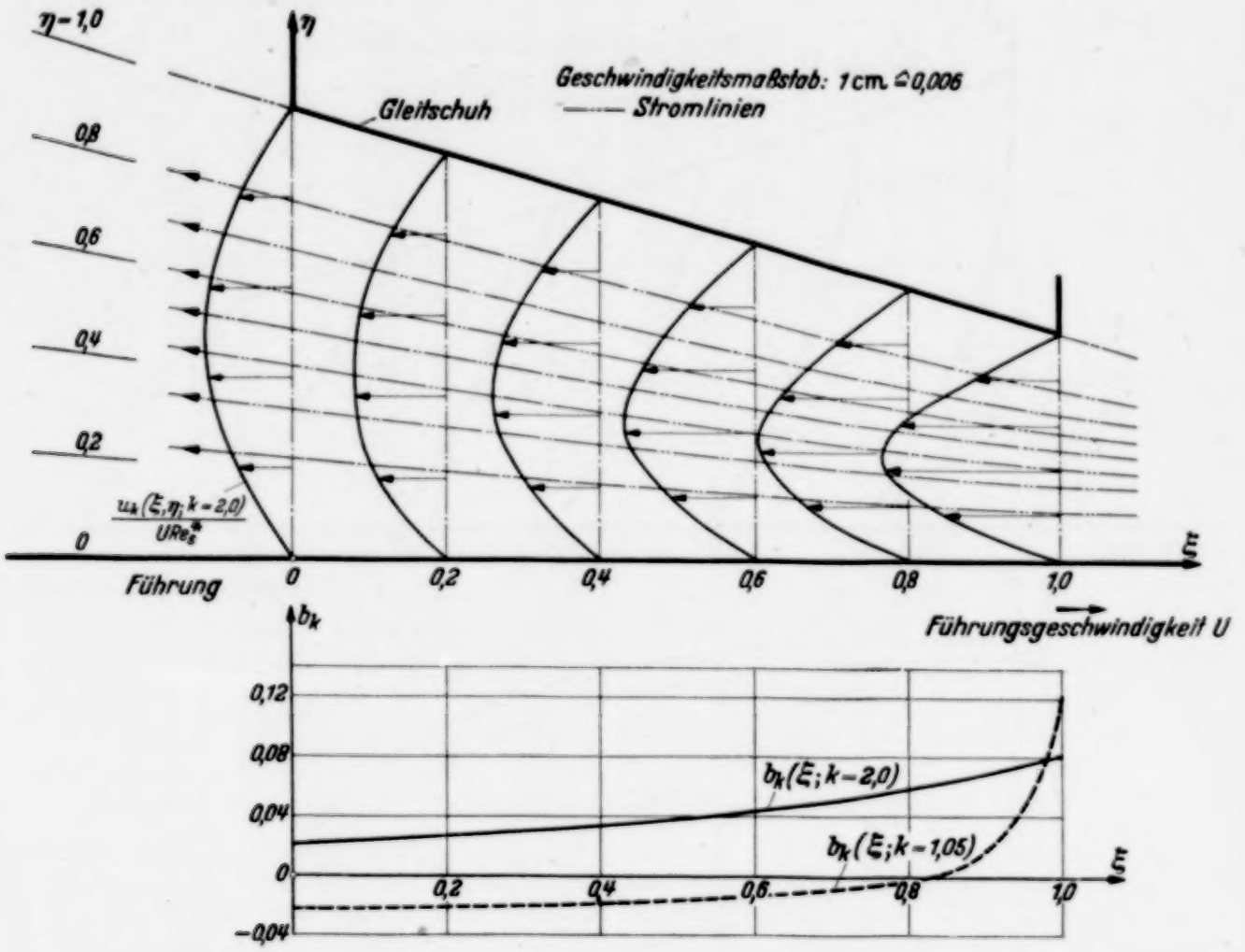

Abb. 2. Geschwindigkeitsverteilung und Schubspannung an der Führung für die Korrekturströmung beim ebenen Gleitschuh.

Es wurde die Geschwindigkeitsverteilung für $k = 2{,}0$ ausgerechnet. Dieser Wert wurde gewählt, weil in dessen Nähe, wie zu (2,11) bemerkt, die maximale Tragfähigkeit des Gleitschuhs bei festgehaltener Austrittshöhe vorhanden ist. Die Ergebnisse sind in Abb. 2 als Geschwindigkeitsprofile über den Schmierkeilquerschnitten aufgetragen. Weiter ist dort das Stromlinienbild der Korrekturströmung eingezeichnet; es wurde durch zeichnerische Integration der Geschwindigkeitsprofile von der Führung ($\eta = 0$) ab erhalten. Die Korrekturströmung hat im allgemeinen negatives Vorzeichen, ist also der Geschwindigkeit der Führung U entgegengesetzt gerichtet und baut die Strömung der ersten Näherung um ein gewisses Maß ab. Dies leuchtet anschaulich ein: Im Schmierkeil muß die Flüssigkeit in positiver Richtung (stromabwärts) beschleunigt werden. Die Trägheit widersetzt sich dieser Beschleunigung; infolgedessen ist $u_K < 0$. Bei sehr kleinen k-Werten allerdings ($k < 1{,}06$) wechselt in gewissen Gebieten des Schmierkeils das Vorzeichen. So wird für $k = 1{,}05$ im Punkt ($\xi = 0$, $\eta = 0{,}2$) die Geschwindigkeit $u_K/U = +Re_s^*\, 0{,}00209$. Bei Besprechung des Reibungswiderstandes wird noch darauf zurückgekommen. Als Beispiel

für die Überlagerung zur Gesamtströmung der zweiten Näherung wurde für $k=2{,}0$

$$\frac{u_2(\xi,\eta)}{U} = \frac{u_1(\xi,\eta)}{U} + \frac{u_K(\xi,\eta)}{U} \tag{5,8}$$

für $Re_s^* = 5$ aufgezeichnet (Abb. 3). Bei dieser Re^*-Zahl beträgt der Einfluß der Trägheit des Schmiermittels auf die Geschwindigkeitsverteilung schon etwa 10 %.

Durch Integration des Druckgradienten (5,3) erhält man die Druckverteilung

$$p_K(\xi;k) = \frac{\mu U l}{h_E^2} Re_s^* f_K(\xi;k) = \varrho U^2 f_K(\xi;k) \tag{5,9}$$

mit der dimensionslosen Druckfunktion

$$\left.\begin{aligned} f_K(\xi;k) = \frac{1}{7}\frac{(k-1)^2}{2k-1}\left[\frac{3}{5}\frac{1}{2k-1} + ln\,\frac{k}{k-1}\right]\left[1-\left(\frac{1}{1-\xi/k}\right)^2\right] - \\ - \frac{3}{35}\frac{k-1}{2k-1}\left[1-\frac{1}{1-\xi/k}\right] + \frac{1}{7}\,ln\,\frac{1}{1-\xi/k}\,. \end{aligned}\right\} \tag{5,10}$$

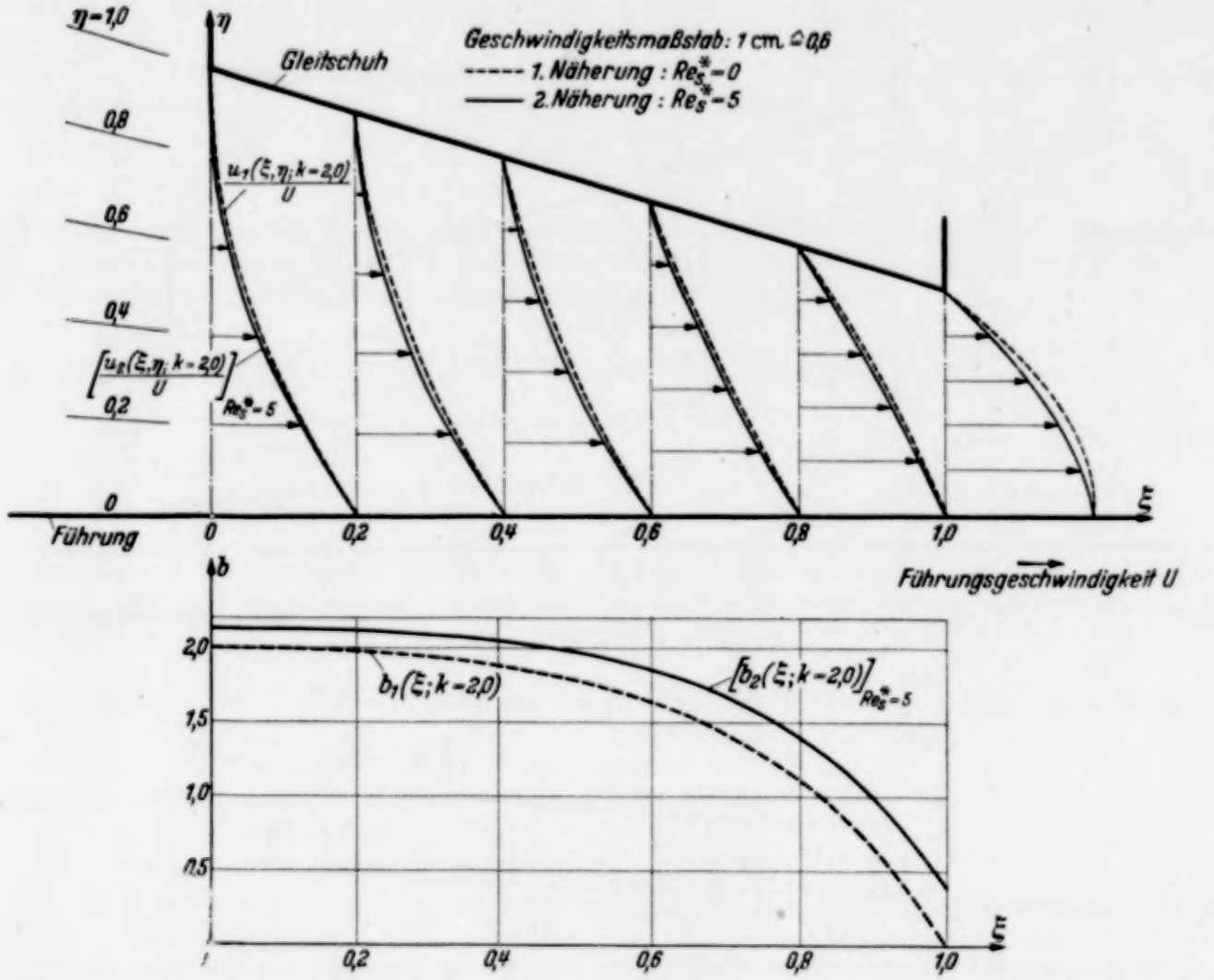

Abb. 3. Geschwindigkeitsverteilung und Schubspannung an der Führung für die erste und zweite Näherung beim ebenen Gleitschuh.

Für die Korrektur der Druckverteilung p_K ist sehr bemerkenswert, daß sie von der Spalthöhe nicht abhängig ist. Sie ändert sich nicht, wenn (nach Abb. 1) der Keilwinkel δ geändert wird, da ja hierbei $k=a/l$ konstant bleibt.

Die Funktionen $f_1(\xi;k)$ und $f_K(\xi;k)$ wurden für $k=1{,}5$, 2,0, 2,5 und 3,0 ausgerechnet (Zahlentafel 1 und Abb. 4). Der Wert p_K ist für alle ξ und k positiv, d. h., die Tragfähigkeit wird bei vorgegebener Gleitgeschwindigkeit U und Zähigkeit μ durch die Trägheit erhöht. Der Druck der Korrekturströmung weist über die Gleitschuhlänge einen auffallend ähnlichen Verlauf auf wie der Druck der ersten Näherung. Das zeigt sich auch, wenn man für verschiedene Parameter k den Druckverlauf durch den mittleren Druck

$$p\,m_K = \frac{P_K(k)}{l} = \int_{\xi=0}^{1} p_K(\xi;k)\,d\xi \tag{5,11}$$

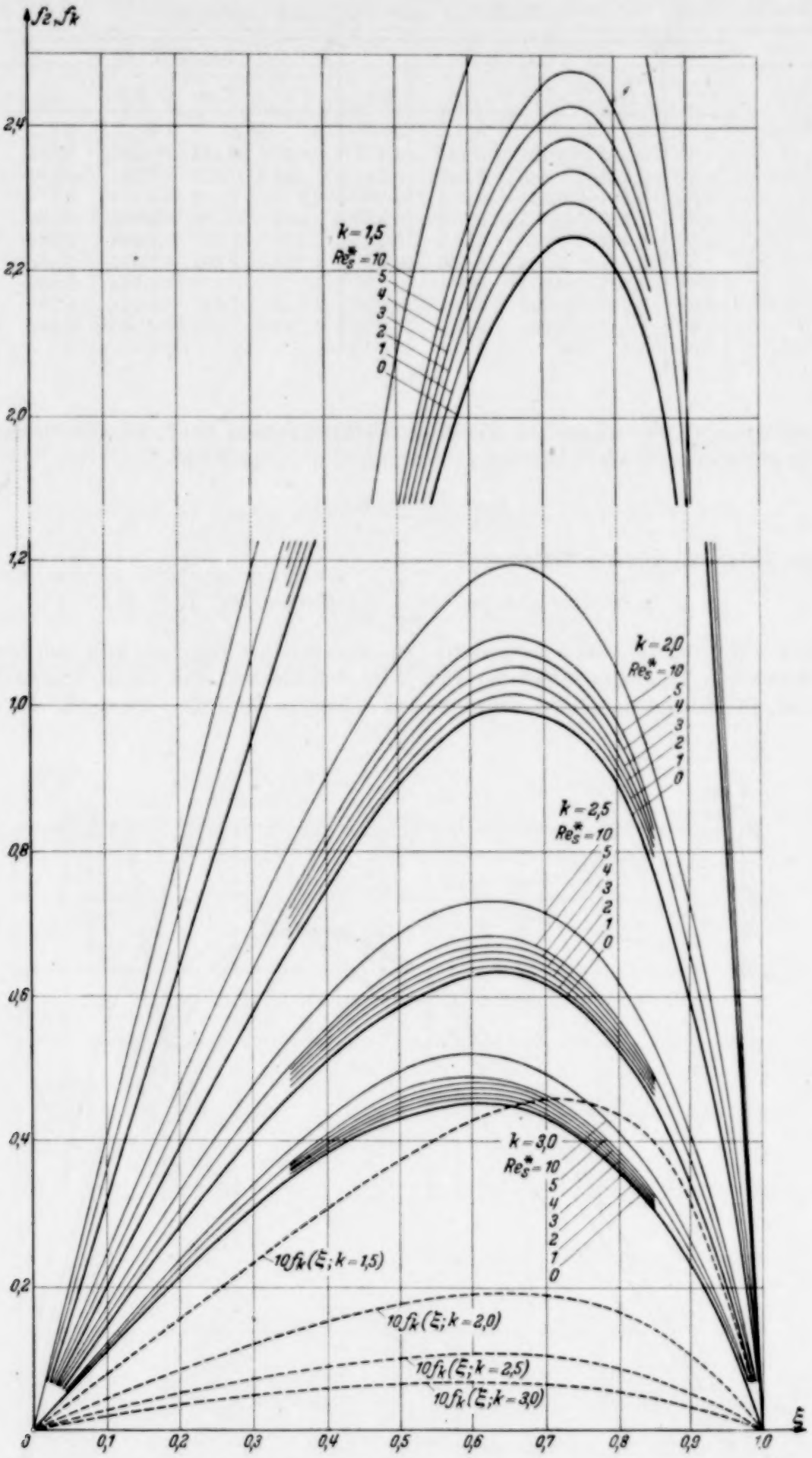

Abb. 4. Druckverteilung beim ebenen Gleitschuh.

Zahlentafel 1.

Druckverteilung über dem ebenen Gleitschuh.

ξ \ k	$f_1(\xi;k)$				$100\, f_K(\xi;k)$			
	1,5	2,0	2,5	3,0	1,5	2,0	2,5	3,0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,314	0,195	0,145	0,108	0,769	0,424	0,265	0,181
0,2	0,639	0,386	0,285	0,212	1,546	0,823	0,507	0,343
0,3	0,945	0,575	0,405	0,306	2,318	1,191	0,717	0,476
0,4	1,270	0,745	0,510	0,382	3,067	1,509	0,885	0,580
0,5	1,683	0,888	0,585	0,432	3,742	1,751	1,004	0,647
0,6	2,045	0,984	0,630	0,450	4,282	1,891	1,046	0,666
0,7	2,225	0,984	0,615	0,432	4,578	1,871	1,014	0,630
0,8	2,210	0,900	0,525	0,360	4,364	1,637	0,846	0,515
0,9	1,692	0,600	0,345	0,234	3,191	1,052	0,525	0,312
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0

mit der später in (5,15) erhaltenen Funktion $F_K(k)$ dividiert (Abb. 5). Wie in der klassischen Lösung erhält man auch hier beim Grenzübergang $k \to \infty$ die Parabel

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_K}{p\, m_K} = 6\,\xi\,(1-\xi)\,. \tag{5,12}$$

Der Druckverlauf in zweiter Näherung

$$p_2(\xi;k) = p_1 + p_K = \frac{\mu\, U\, l}{h_E{}^2}\left[f_1(\xi;k) + Re_s^*\; f_K(\xi;k)\right] \tag{5,13}$$

ist, wieder für $Re_s^* = 5$, in Abb. 5 dargestellt. Als wesentliches Ergebnis läßt sich festhalten, daß mit zunehmendem Trägheitseinfluß der Druck im Schmierkeil und damit dessen Tragfähigkeit erhöht wird. Die Korrektur macht bei normalen k-Werten für $Re_s^* = 1$ um 2 % der alten Lösung aus.

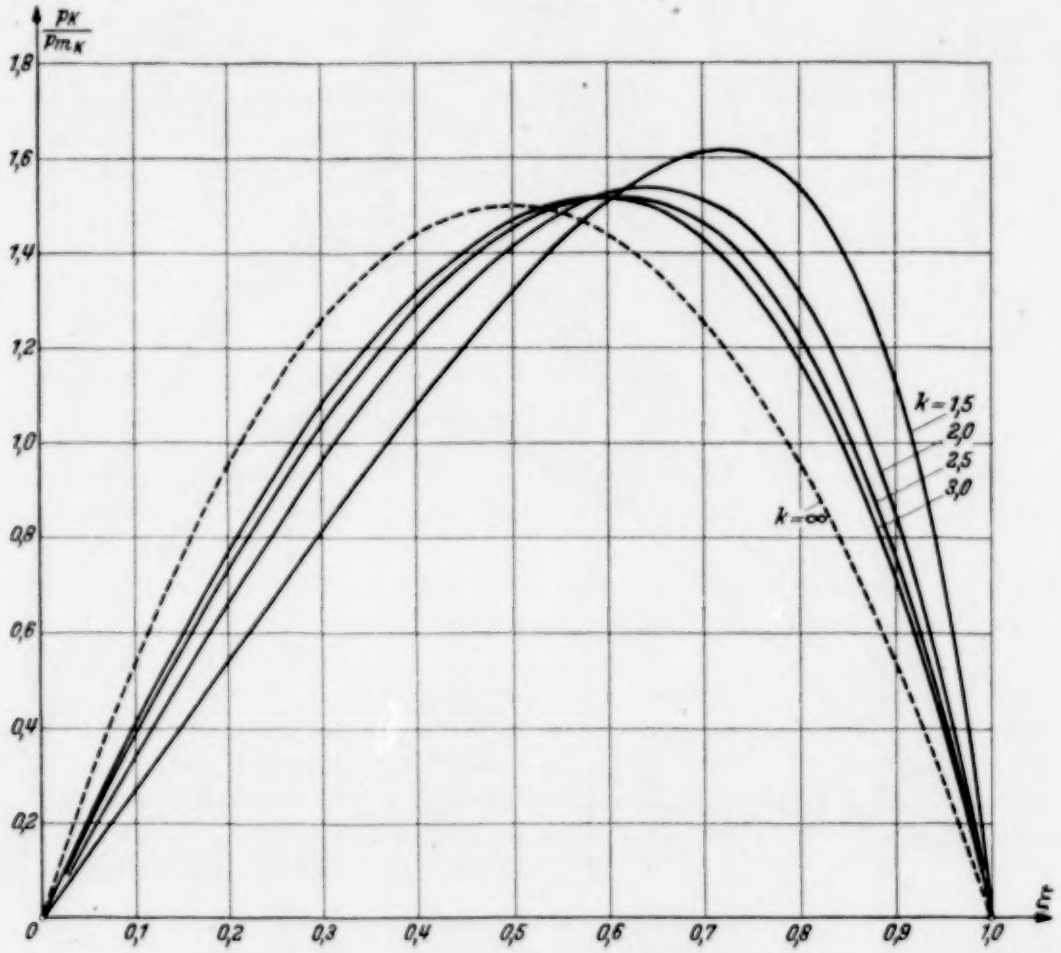

Abb. 5. Relative Druckverteilung beim ebenen Gleitschuh.

Zahlentafel 2.

Tragkraft und Reibungskraft je Breiteneinheit und Reibungskoeffizient beim ebenen Gleitschuh.

k	$F_1(k)$	$F_K(k)$	$F_1^*(k)$	$F_K^*(k)$	$W_1(k)$	$W_K(k)$	$w_1(k)$	$m(k)$
1,0	∞	0,1429	0	0	∞	−0,0286	0,820	
1,1	5,330	0,0857	0,044	0,00071	5,050	+0,0097	0,948	−0,0148
1,2	3,130	0,0588	0,087	0,00163	3,460	+0,0287	1,105	−0,0105
1,3	2,190	0,0449	0,117	0,00239	2,760	+0,0384	1,260	−0,0066
1,4	1,680	0,0349	0,137	0,00284	2,348	+0,0431	1,400	−0,0029
1,5	1,330	0,0283	0,148	0,00315	2,095	+0,0452	1,572	+0,0003
1,6	1,110	0,0237	0,155	0,00330	1,920	+0,0462	1,730	+0,0026
1,7	0,940	0,0198	0,159	0,00332	1,789	+0,0458	1,901	+0,0045
1,8	0,818	0,0167	0,160	0,00329	1,685	+0,0451	2,080	+0,0063
1,9	0,719	0,0142	0,159	0,00319	1,604	+0,0441	2,260	+0,0074
2,0	0,634	0,0123	0,158	0,00308	1,543	+0,0428	2,440	+0,0082
2,5	0,405	0,0069	0,148	0,00248	1,360	+0,0368	3,360	+0,0099
3,0	0,302	0,0044	0,134	0,00197	1,272	+0,0316	4,290	+0,0095
∞	0	0	0	0	1	0	∞	

Integration des Druckes (5,9) über die gesamte Gleitschuhlänge l ergibt die Last der Breiteneinheit, die der Gleitschuh mit der Korrekturströmung zusätzlich aufzunehmen imstande ist:

$$P_K(k) = l\int_0^1 p_K(\xi)\,d\xi = \frac{\mu U l^2}{h_E^2}\,Re_s^*\,F_K(k) = \varrho\,U^2 l\,F_K(k) \tag{5,14}$$

mit der dimensionslosen Tragkraftfunktion

$$F_K(k) \equiv \frac{1}{7} - \frac{6}{35}\,\frac{k^2-k}{(2k-1)^2} - \frac{1}{5}\,\frac{k^2-k}{2k-1}\,ln\,\frac{k}{k-1}\,. \tag{5,15}$$

Somit wird die Gesamttragkraft in zweiter Näherung

$$P_2(k) = P_1(k) + P_K(k) = \frac{\mu U l^2}{h_E^2}\left[F_1(k) + Re_s^*\,F_K(k)\right]. \tag{5,16}$$

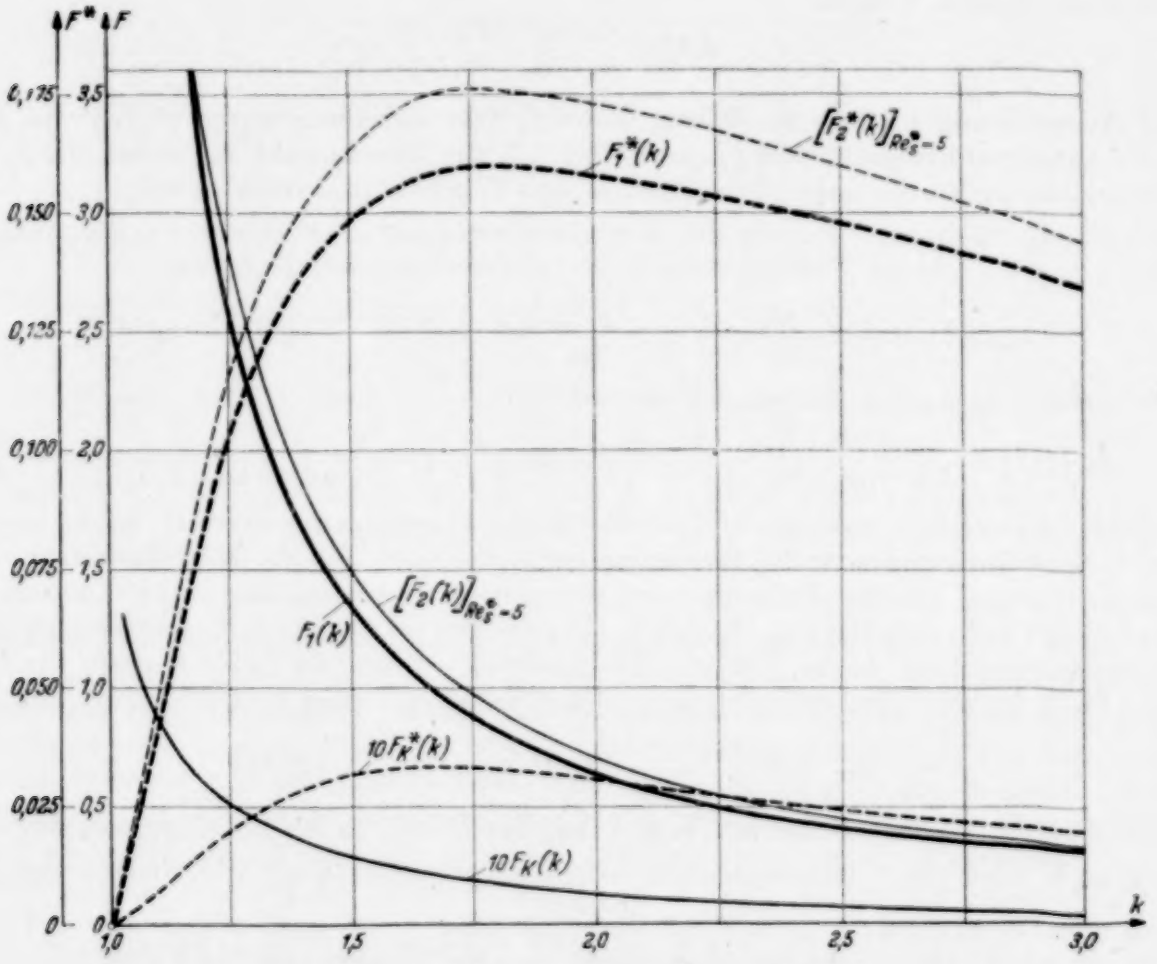

Abb. 6. Tragkraft je Breiteneinheit beim ebenen Gleitschuh.

Die Tragkraftfunktionen werden anschaulicher, wenn man sich nicht auf die Eintrittskante des Schmierkeils h_E, sondern auf die Austrittskante h_A bezieht, also schreibt

$$P_2(k) = \frac{\mu U l^2}{h_A^2}\left[F_1^*(k) + Re_s^* F_K^*(k)\right], \tag{5,17}$$

wobei $Re_s^* = \frac{Ul}{\nu}\left(\frac{h_E}{l}\right)^2$ mit h_E gebildet bleibt. Dann erhält man, ähnlich wie in der ersten Näherung, ein Maximum, hier etwa zwischen $k=1{,}6$ und 1,7. Numerische Werte für $F_1(k)$, $F_K(k)$, $F_1^*(k)$, $F_K^*(k)$ finden sich in Zahlentafel 2 und Abb. 6. Als Ergebnis erkennt man wieder den nicht zu vernachlässigenden Einfluß der Schmiermittelträgheit, der bei $Re_s^* = 5$ und normalen k-Werten wieder zu etwa 10 % herauskommt.

Es bleibt noch die Frage, ob die Druckpunktlage, also der Abstand l_r des Lastangriffspunktes von der Vorderkante des Gleitschuhs, wesentlich von der Korrekturströmung beeinflußt wird. Rechnet man hierzu das Lastmoment $M_K(k)$ aus, wieder durch eine Integration der Druckfunktion p_K über die Gleitschuhlänge, mit dem Ergebnis

$$M_K(k) = l^2 \int_0^1 p_K(\xi)\,\xi\,d\xi = \frac{\mu U l^3}{h_E^2} Re_s^* G_K(k) = \varrho U^2 l^2 G_K(k), \tag{5,18}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} G_K(k) = {} & \frac{1}{7}\frac{(k-1)^2}{2k-1}\left(\frac{3}{5}\frac{1}{2k-1} + ln\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{k^2}{k-1} + k^2 ln\frac{k}{k-1}\right) - \\ & - \frac{3}{35}\frac{k-1}{2k-1}\left(\frac{1}{2} + k - k^2 ln\frac{k}{k-1}\right) + \frac{2k+1}{28} - \frac{k^2-1}{14} ln\frac{k}{k-1}, \end{aligned}\right\} \tag{5,19}$$

bildet das gesamte, korrigierte Moment $M_2 = M_1 + M_K$ und dividiert durch die mit der Gleitschuhlänge l multiplizierte Tragkraft P_2, so läßt sich die korrigierte Druckpunktlage aufteilen, da $G_K/G_1 \ll 1$ und ebenso $F_K/F_1 \ll 1$, in

$$\left[\frac{l_r}{l}\right]_2 = \left[\frac{l_r}{l}\right]_1 \left[1 + Re_s^* d(k)\right] \tag{5,20}$$

mit den sehr kleinen Werten

$$d(k) = \frac{G_K(k)}{G_1(k)} - \frac{F_K(k)}{F_1(k)}. \tag{5,21}$$

Bei der Ausrechnung bleiben die Werte von $d(k)$ fast durchweg unter 10^{-3}, d. h., bei $Re_s^* = 5$ bleibt die Druckpunktverschiebung unterhalb 0,5 % der Druckpunktlage in der ersten Näherung. Letztere ändert sich also unter dem Einfluß der Trägheit praktisch nicht.

Nach (2,14) erhält man die von der Korrekturströmung herrührende Schubspannung an der Führung ($y=\eta=0$) durch Differentiation der Geschwindigkeit (5,6) zu

$$\tau_{0K}(\xi;k) = \mu \left.\frac{\partial u_K}{\partial y}\right|_{y=0} = -\frac{\mu U}{h_E} Re_s^* b_K(\xi;k) = -\varrho U^2 \frac{h_E}{l} b_K(\xi;k) \tag{5,22}$$

mit der dimensionslosen Schubspannungsfunktion

$$b_K(\xi;k) = \frac{1}{7k}\left\{\left[\frac{18}{5}\left(\frac{k-1}{2k-1}\right)^2 - \frac{(k-1)^2}{2k-1} ln\frac{k}{k-1}\right]\left(\frac{1}{1-\xi/k}\right)^2 + \frac{k-1}{2k-1}\frac{1}{1-\xi/k} - \frac{1}{5}\right\}. \tag{5,23}$$

Das negative Vorzeichen bedeutet hier wieder die zu U entgegengesetzte Richtung in dem Sinne, daß durch die Schubspannung die Bewegung gehemmt wird. In der Korrekturströmung nimmt die Schubspannung an der Führung von Schmiermitteleintrittskante zur Austrittskante zu. Bei sehr kleinen k-Werten liegt die Kurve $b_K(k)$ zum Teil im negativen Gebiet, entsprechend einer negativen Reibungskraft (siehe unten). Als Beispiel wurden die $b_K(k)$-Kurven für $k=2{,}0$ und 1,05 in Abb. 2 aufgetragen. Die alte Kurve der Schubspannung und die neue, korrigierte

$$\tau_{02}(\xi;k) = -\frac{\mu U}{h_E}\left[b_1(\xi;k) + Re_s^* b_K(\xi;k)\right], \tag{5,24}$$

als Beispiel für $Re_s^* = 5$ ausgerechnet, findet man für $k=2{,}0$ in Abb. 3 aufgezeichnet.

Integration über die Gleitschuhlänge liefert die Reibungskraft der Breiteneinheit

$$T_K(k) = -l\int_0^1 \tau_{0K}(\xi;k)\,d\xi = \frac{\mu U l}{h_E} Re_s^* W_K(k) = \varrho U^2 h_E W_K(k) \tag{5,25}$$

mit

$$W_K(k) \equiv \frac{18}{35}\frac{k-1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{35}\frac{1}{k}. \tag{5,26}$$

und die Gesamtreibungskraft ist in zweiter Näherung

$$T_2(k) = \frac{\mu U l}{h_E}\left[W_1(k) + Re_s^*\ W_K(k)\right]. \tag{5,27}$$

Der korrigierte Reibungskoeffizient wird, da die Korrekturfunktionen kleine Größen sind,

$$w_2(k) = \frac{T_2(k)}{l'_2(k)} = w_1(k)\left[1 + Re_s^*\ m(k)\right] \tag{5,28}$$

mit

$$m(k) \equiv \frac{W_K(k)}{W_1(k)} - \frac{F_K(k)}{F_1(k)}. \tag{5,29}$$

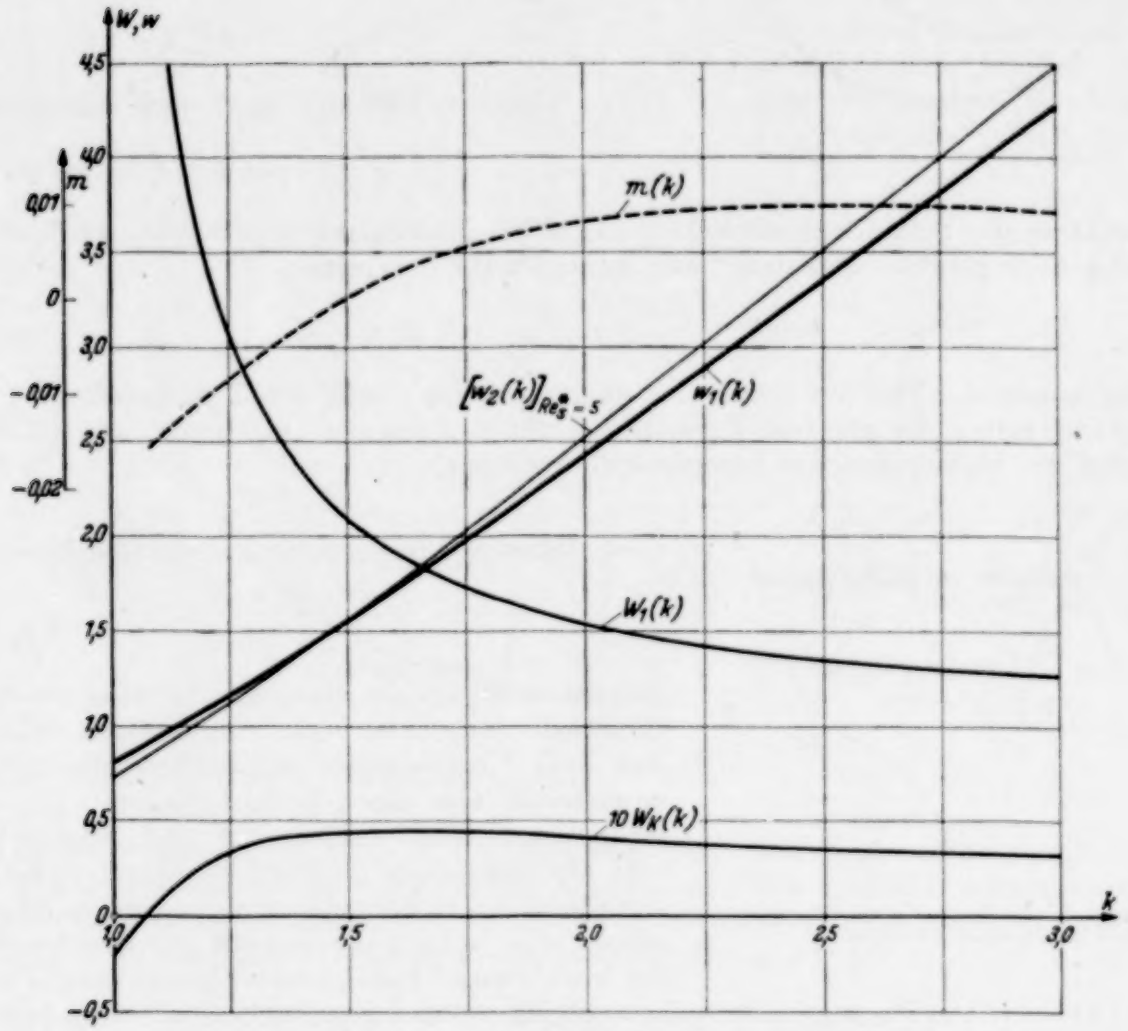

Abb. 7. Reibungskraft je Breiteneinheit, Reibungskoeffizient und Korrekturfunktion beim ebenen Gleitschuh.

Die Funktionen für Reibungskraft und Reibungskoeffizient sind in Zahlentafel 2 und Abb. 7 ausgewertet. Das interessante Ergebnis ist, daß im allgemeinen die Reibungskraft durch die Korrekturströmung vergrößert wird, daß aber bei sehr kleinen k-Werten ($k<1{,}06$) die Korrekturfunktion $W_K(k)$ negativ wird, d. h., die „Reibung" der Korrekturströmung wirkt treibend. Für einen solchen k-Wert ist, wie oben besprochen, die Schubspannung an einem großen Teil der Führung negativ. An diesen Stellen muß auch die Geschwindigkeit umgekehrte Richtung haben. Zum Beispiel wirkt für $k=1{,}05$ am Punkt ($\xi=0$, $\eta=0{,}2$) die Geschwindigkeit $u_K/U = +Re_s^* \times 0{,}00209$, während am Ausgang des Schmierkeils ($\xi=1$, $\eta=0{,}2$), wo die Schubspannung wieder das normale Vorzeichen hat, auch die Geschwindigkeit der Korrekturströmung wieder negativ ist: $u_K/U = -Re_s^* \cdot 0{,}00144$. Die Korrektur des Reibungskoeffizienten $m(k)$ wird für $k<1{,}5$ negativ, der Reibungskoeffizient selbst also von hier ab schon entsprechend verringert.

6. Die klassische Theorie des Zapfenlagers. Auch für das Zapfenlager seien die Ergebnisse der alten Theorie vorangestellt. Es wird ein unendlich breiter Wellenzapfen vom Halbmesser r angenommen, der sich nach Abb. 8 in einer unendlich breiten Lagerbüchse vom Halbmesser R dreht (Lagerspiel $R-r=s$). Dann hat der Schmierkeil die mit dem Umfang $x=r\varphi$ veränderliche Schmierschichtdicke

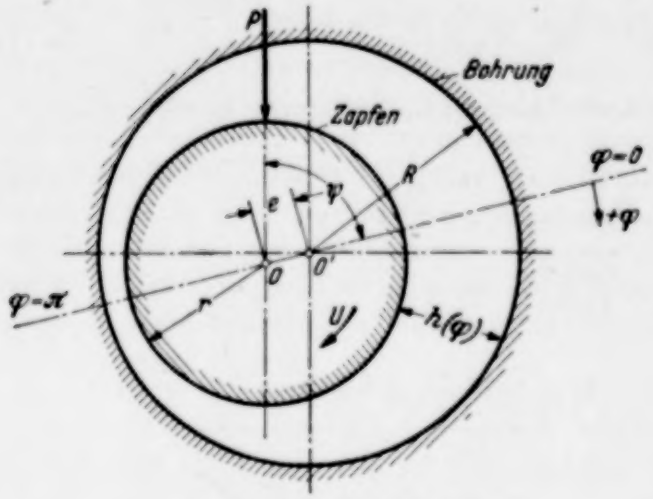

Abb. 8. Größen am Zapfenlager.

$$h(\varphi)=s+e\cos\varphi\,, \tag{6,1}$$

wenn $\varphi=0$ an der Stelle der größten Spaltweite liegt. Hier ist e die Exzentrizität, also der jeweilige, durch den Betriebszustand, also Umfangsgeschwindigkeit $U=r\omega$ und Last P bestimmte Abstand der Mittelpunkte 0 und 0′ von Zapfen und Lager, und variiert zwischen 0 und s. Wenn man die relative Exzentrizität

$$\varepsilon=\frac{e}{s}\quad(0\leqq\varepsilon<1) \tag{6,2}$$

einführt, läßt sich (6,1) auch schreiben

$$\frac{h(\varphi)}{e}=\frac{s}{e}+\cos\varphi=\frac{1}{\varepsilon}+\cos\varphi\,. \tag{6,3}$$

Da die Funktion der Schmierschichtdicke (6,1) einem Kosinusgesetz gehorcht, ist deren Ableitung, jetzt nach φ gebildet und daher mit einem Punkt bezeichnet,

$$h^{\cdot}(\varphi)=\frac{dh}{d\varphi}=r\,\frac{dh}{dx}=-e\sin\varphi \tag{6,4}$$

nicht mehr konstant. Für die Geschwindigkeitsverteilung und den Druckgradienten in der Schmierschicht gelten die gleichen Formeln wie für den ebenen Gleitschuh, also (4,10) bzw. (4,11), wobei das Differential der Längskoordinate

$$dx=r\,d\varphi \tag{6,5}$$

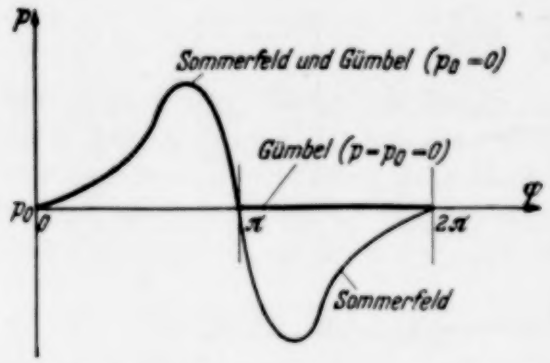

Abb. 9. Grundsätzlicher Druckverlauf um den Zapfenumfang nach *Sommerfeld* und nach *Gümbel*.

wird. Allerdings ist jetzt die Integrationskonstante

$$h_0=e\,\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon+\frac{\varepsilon^3}{2}}\,, \tag{6,6}$$

und für die Druckverteilung und die dazu notwendigen Randbedingungen bei dem ringförmigen Schmierfilm sind noch Überlegungen anzustellen, die sich nicht unmittelbar von denen beim Gleitschuh mit seinem eindeutigen Schmierkeileintritt und Schmierkeilaustritt ableiten lassen. *Sommerfeld* integrierte die Druckverteilung (4,11) über den ganzen Zapfenumfang und erhielt eine zu π antisymmetrische Druckverteilung, die sich einem unbekannten konstanten Druck p_0 überlagert (Abb. 9). Die Theorie forderte die Möglichkeit von Unterdrucken, d. h. Zugspannungen im Schmierstoff, und schon *Sommerfeld* selbst wies auf diese physikalische Unwahrscheinlichkeit hin. *Gümbel*, später *Vogelpohl* und *Frössel* zeigten durch Versuche, daß bei Unterschreiten des Dampfdruckes das Öl zu schäumen beginnt und der zusammenhängende Ölfilm aufreißt (Kavitation). Daher legte *Gümbel* seinen Berechnungen die Annahme zugrunde, daß sich in der erweiternden Hälfte des Schmierringes von $\varphi=\pi$ bis $\varphi=2\pi$ kein Unterdruck ausbilden kann, dort also einfach der Atmosphärendruck $p_0=0$ herrscht. Dies ist dann auch die Randbedingung für den „Schmierkeil", an dessen Einlauf bei $\varphi=0$ und Auslauf $\varphi=\pi$ (Abb. 9). Die so erhaltene Druckverteilung zwischen $\varphi=0$ und $\varphi=\pi$ war in der klassischen Theorie

$$\left.\begin{aligned} p_1(\varphi;\varepsilon)&=\int_0^{\varphi}\frac{dp_1}{d\varphi}\,d\varphi=\frac{\mu U r}{s^2}\,f_1(\varphi;\varepsilon)\,,\\ \text{mit}\qquad f_1(\varphi;\varepsilon)&=\frac{6\varepsilon}{2+\varepsilon^2}\,\frac{\sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}\left(1+\frac{1}{1+\varepsilon\cos\varphi}\right).\end{aligned}\right\} \tag{6,7}$$

Bei Berechnung der Tragkraft des Zapfenlagers fand *Sommerfeld* das Ähnlichkeitsgesetz der Schmiermittelreibung: Zu jedem Betriebszustand, gekennzeichnet durch die Lagerzahl

$$L(\varepsilon) = \frac{P(\varepsilon)\, s^2}{\mu\, U\, r^2}, \tag{6,8}$$

also insbesondere durch die Belastung und die Umfangsgeschwindigkeit, gehört eine bestimmte Verlagerung des Zapfenmittelpunktes 0 gegenüber dem Lagermittelpunkt 0′, gekennzeichnet durch die relative Exzentrizität ε und den Verlagerungswinkel ψ, in dem sich die Stelle der größten Schmierschichtdicke ($\varphi = 0$) zu Lagerlast P einstellt. Zu jedem ε gehört ein Verlagerungswinkel ψ. Der Zusammenhang läßt sich in der Verlagerungskurve des Wellenmittels darstellen (Abb. 10), und jedem Punkt dieser Kurve ist eine Lagerzahl L zugeordnet, beginnend bei $L = 0$ im Lagermittelpunkt 0′, wenn der Zapfen zentrisch läuft, (entspr. $\varepsilon = 0$), bis $L = \infty$ im Abstand des Lagerspiels s in Richtung der Belastung, wenn Zapfen auf Lagerscheibe schleift (entspr. $\varepsilon = 1$). *Gümbel* fand in numerischer Rechnung, daß sich diese Kurve für die Wanderung des Wellenmittels mit ε durch den Halbkreis $\cos\psi = \varepsilon$ annähern ließ. *Stieber*[1] bringt die folgende analytische Lösung für Lagerzahl und Verlagerungskurve.

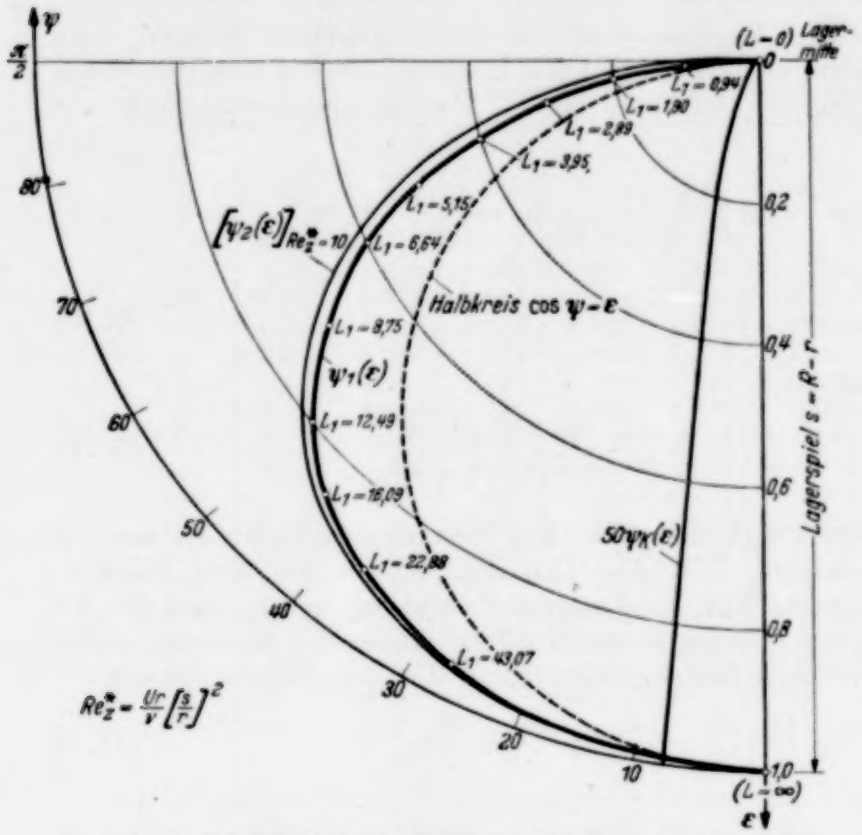

Abb. 10. Verlagerungskurve des Wellenmittels nach *Gümbel*.

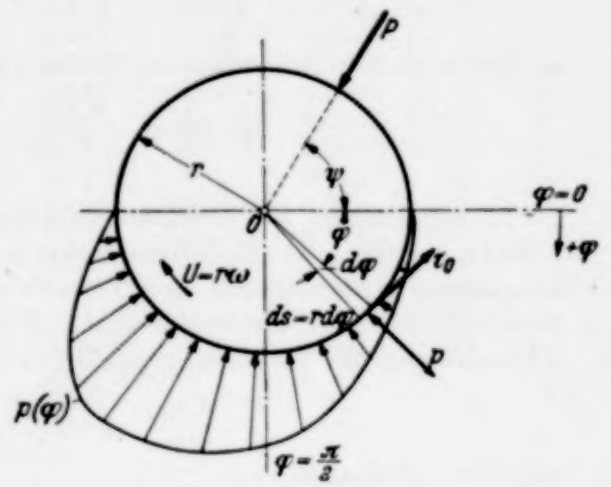

Abb. 11. Kräfte am Zapfen.

Die Resultierende der Druck- und Reibungskräfte über den Zapfenumfang muß mit der Belastung P und dem Drehmoment im Gleichgewicht stehen. Nach Abb. 11 wirken an einem Element $ds = r\,d\varphi$ des Zapfenumfangs in Richtung $\varphi = 0$ die Kräfte $-p\cos\varphi\, ds + \tau_0 \sin\varphi\, ds$, in Richtung $\varphi = \pi/2$ die Kräfte $-p\sin\varphi\, ds - \tau_0\cos\varphi\, ds$; also gilt

$$\left.\begin{aligned} -P\cos\psi - \int_0^{\pi} p\cos\varphi\, ds + \int_0^{\pi} \tau_0 \sin\varphi\, ds = 0\,, \\ P\sin\psi - \int_0^{\pi} p\sin\varphi\, ds - \int_0^{\pi} \tau_0\cos\varphi\, ds = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{6,9}$$

Mit partieller Integration erhält man bei Vernachlässigung der Trägheitswirkung und eines von zweiter Ordnung kleinen Gliedes die Beziehungen für die Lagerzahl L, die der dimensionslosen Funktion $F(k)$ beim ebenen Gleitschuh entspricht,

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_1 s^2}{\mu U r^2}\cos\psi_1 \equiv L_1\cos\psi_1 = \frac{6}{\varepsilon^2}\int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\cos\varphi\right)^2} - \frac{6\,h_0}{s\,\varepsilon^3}\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\cos\varphi\right)^3} \equiv C_1(\varepsilon)\,, \\ \frac{P_1 s^2}{\mu U r^2}\sin\psi_1 \equiv L_1\sin\psi_1 = \frac{6}{\varepsilon^2}\int_0^{\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\cos\varphi\right)^2} - \frac{6\,h_0}{s\,\varepsilon^3}\int_0^{\pi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\cos\varphi\right)^3} \equiv S_1(\varepsilon)\,. \end{aligned}\right\} \tag{6,10}$$

[1] *W. Stieber*, a. a. O. S. 61.

Diese Funktionen, mit $C(\varepsilon)$ bzw. $S(\varepsilon)$ abgekürzt, integrieren sich zu

$$C_1(\varepsilon) \equiv \frac{12\,\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)\,(2+\varepsilon^2)} \tag{6,11}$$

und

$$S_1(\varepsilon) \equiv \frac{6\,\pi\,\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)\,\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,. \tag{6,12}$$

Lagerzahl und Verlagerungswinkel des Wellenmittels erhält man nun durch trigonometrische Verknüpfung von (6,10) zu

$$L_1(\varepsilon) = \sqrt{C_1^2(\varepsilon) + S_1^2(\varepsilon)} = \frac{6\,\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)\,(1-\varepsilon^2)}\,\sqrt{\pi^2(1-\varepsilon^2)+4\,\varepsilon^2}\,, \tag{6,13}$$

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{S_1(\varepsilon)}{C_1(\varepsilon)} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}}\,. \tag{6,14}$$

Das Reibungsmoment der Längeneinheit des Zapfens wurde in der klassischen Theorie, wenn man nur die Schubspannung an der Hälfte des Umfangs berücksichtigt, an der sich der Druck ausbildet, und wenn man das Moment entgegen der Richtung der Umfangsgeschwindigkeit, wie natürlich, positiv definiert,

$$N_1(\varepsilon) = -r^2\int_0^{\pi}\tau_{01}\,d\varphi = -r^2\mu\int_0^{\pi}\left[\frac{\partial u_1}{\partial y}\right]_{y=0}d\varphi = \frac{\mu\,U\,r^2}{s}\;V_1(\varepsilon) \tag{6,15}$$

mit

$$V_1(\varepsilon) = \frac{2\,\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\;\frac{1+2\,\varepsilon^2}{2+\varepsilon^2}, \tag{6,16}$$

so daß sich der Reibungskoeffizient ergab zu

$$w_1(\varepsilon) = \frac{N_1(\varepsilon)}{r\;P_1(\varepsilon)} = \frac{s}{r}\,\frac{V_1(\varepsilon)}{L_1(\varepsilon)} = \frac{s}{r}\,\frac{\pi}{3}\,\frac{(1+2\,\varepsilon^2)\,\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon\,\sqrt{\pi^2(1-\varepsilon^2)+4\,\varepsilon^2}}\,. \tag{6,17}$$

7. Zapfenlager bei Berücksichtigung der Trägheitskräfte. Die Betrachtungen, die im vorigen Abschnitt für die Geschwindigkeitsverteilung und den Druckgradienten mit den Randbedingungen in der klassischen Theorie als erste Näherung angestellt wurden, gelten auch für die zweite Näherung. Die in Abschnitt 4 bereitgestellten Formeln gelten allgemein. In sinngemäßer Abwandlung der Rechnung erhält man für den Druckgradienten in der Korrekturströmung

$$\frac{dp_K}{d\varphi} = \varrho\,U^2\left[\frac{B(\varepsilon)}{h^3} - \frac{h^*}{h}\left(\frac{K_1}{2} + \frac{K_2}{10/3} + \frac{K_3}{5} + \frac{K_4}{7}\right)\right] \tag{7,1}$$

mit dem Volumen

$$B(\varepsilon) = \frac{6}{7\,\pi}\,e^3\,\frac{(1-\varepsilon^2)^{5/2}}{\varepsilon^3}\left[\frac{36}{5}\,\frac{\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)^3} - \frac{2}{5}\,\frac{\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)^2} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{2+\varepsilon^2}\,ln\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]. \tag{7,2}$$

Für die Druckverteilung über den halben Umfang des unendlich breiten Zapfens ergibt sich dann durch Integration nach einiger Rechnung das Formelsystem

$$p_K(\varphi;\varepsilon) = \frac{\mu\,U\,r}{s^2}\,Re_z^*\,f_K(\varphi;\varepsilon) = \varrho\,U^2 f_K(\varphi;\varepsilon)\,, \tag{7,3}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} f_K(\varphi;\varepsilon) \equiv \frac{216}{35}\,\frac{\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)^2}\left(\frac{Kl.\,I}{\pi} - \frac{Kl.\,II}{2}\right) - \frac{12}{35}\,\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon^2}\left(\frac{Kl.\,I}{\pi} - \frac{Kl.\,III}{2}\right) - \\ - \frac{2}{7}\,ln\,\frac{1}{\lambda}\,\frac{Kl.\,I}{\pi} + \frac{1}{7}\,ln\,\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\varphi}\Bigg) \end{aligned}\right\} \tag{7,4}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} Kl.\,I &\equiv \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\lambda}\,\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{3}{2}\,\varepsilon\,\frac{(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{2+\varepsilon^2}\,\frac{\sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} - \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}{2+\varepsilon^2}\,\frac{\sin\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}\,, \\ Kl.\,II &\equiv \frac{\varepsilon}{\left(1+\lambda\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)^2} - \frac{1+\varepsilon}{1+\lambda\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} + 1\,, \\ Kl.\,III &\equiv 1 - \frac{1}{1+\lambda\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}\,, \end{aligned}\right\} \tag{7,5}$$

$$\lambda = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,. \tag{7,6}$$

Hierbei ist diesmal die Re^*-Zahl mit dem Zapfenhalbmesser r und dem Lagerspiel s, das der mittleren Schmierschichtdicke $\frac{1}{2}(h_E+h_A)$ entspricht, gebildet worden:

$$Re_z^* = \frac{U r}{\nu}\left(\frac{s}{r}\right)^2. \tag{7,7}$$

Die Grenzbedingungen sind erfüllt: der Druck wird bei $\varphi=0$ und $\varphi=\pi$ zu 0. Auch für $\varepsilon=0$, also die zentrische Zapfenlage, wird $p_K=0$ wie erwartet. Für $\varepsilon=1$ wird der Ausdruck unbestimmt. Dort ist eine singuläre Stelle: der Zapfen liegt auf, und der Schmiermitteldurchtritt ist gesperrt. Die zweite Näherung ist die Überlagerung der klassischen Lösung (6,7) und dieser Korrektur (7,3):

$$p_2(\varphi;\varepsilon) = \frac{\mu U r}{s^2}\left[f_1(\varphi;\varepsilon) + Re_z^* f_K(\varphi;\varepsilon)\right]. \tag{7,8}$$

Die Funktionen $f_1(\varphi;\varepsilon)$ und $f_K(\varphi;\varepsilon)$ sind in Zahlentafel 3 ausgerechnet.

Zahlentafel 3. *Druckverteilung im Zapfenlager.*

ε / φ	$f_1(\varphi;\varepsilon)$					$f_K(\varphi;\varepsilon)$				
	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20°	0,302	0,470	0,546	0,556	0,546	0,003	0,004	0,002	0,003	0,003
40°	0,613	0,964	1,135	1,173	1,164	0,006	0,007	0,012	0,014	0,015
50°	0,753	1,212	1,451	1,522	1,515	0,006	0,010	0,018	0,024	0,025
60°	0,886	1,470	1,795	1,930	1,938	0,007	0,013	0,025	0,035	0,038
70°	1,000	1,732	2,175	2,393	2,430	0,006	0,017	0,032	0,048	0,053
80°	1,104	1,980	2,596	2,950	3,050	0,005	0,020	0,040	0,063	0,071
90°	1,175	2,220	3,050	3,640	3,830	0,004	0,020	0,046	0,080	0,091
100°	1,230	2,436	3,550	4,500	4,890	0,002	0,018	0,052	0,098	0,115
110°	1,250	2,613	4,060	5,600	6,380	−0,001	0,013	0,055	0,117	0,142
120°	1,208	2,745	4,495	7,080	8,600	−0,004	0,008	0,055	0,135	0,171
130°	1,108	2,685	4,860	8,780	11,700	−0,006	0,002	0,048	0,148	0,202
140°	0,973	2,510	5,170	10,770	16,630	−0,008	−0,005	0,036	0,151	0,238
150°	0,786	2,165	4,910	12,610	24,000	−0,010	−0,012	0,018	0,135	0,249
160°	0,553	1,586	3,945	12,600	31,850	−0,009	−0,017	0,000	0,092	0,219
170°	0,287	0,845	2,220	8,320	26,920	−0,007	−0,013	−0,012	0,031	0,115
180°	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Die Druckverteilung der Korrekturströmung allein wurde in Abb. 12, die der Gesamtströmung in erster und zweiter Näherung in Abb. 13: f_2 aufgezeichnet. Im großen ist die Korrektur der Druckverteilung dieser selbst ähnlich, was ja auch beim Gleitschuh festgestellt wurde. Aber man erhält bei kleinen ε-Werten auf einem Teil des Umfangs negative Drücke, die sich mit vergrößernder Exzentrizität ε immer mehr auf das Auslaufende des Schmierkeiles beschränken. Die in der ersten Näherung erhaltenen Drücke werden also dort ein wenig abgebaut.

Auch bei der Berechnung von Lagerzahl und Verlagerungswinkel in zweiter Näherung kann man ganz wie in der ersten Näherung verfahren. Man erhält an Stelle von (6,10)

$$\left.\begin{aligned}\frac{P_2 s^2}{\mu U r^2}\cos\psi_2 \equiv L_2\cos\psi_2 = \frac{6}{\varepsilon^2}\int_0^\pi \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\cos\varphi\right)^2} - \frac{6h_0}{s\varepsilon^3}\int_0^\pi \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\cos\varphi\right)^3} + \\ + Re_z^*\left[\frac{B}{e^3}\int_0^\pi \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\cos\varphi\right)^3} + \int_0^\pi\left(\frac{K_1}{2}+\frac{K_2}{10/3}+\frac{K_3}{5}+\frac{K_4}{7}\right)\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\frac{1}{\varepsilon}+\cos\varphi}\right] \equiv C_2(\varepsilon),\end{aligned}\right\} \tag{7,9}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{P_2 s^2}{\mu U r^2}\sin\psi_2 \equiv L_2\sin\psi_2 = \frac{6}{\varepsilon^2}\int_0^\pi \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\cos\varphi\right)^2} - \frac{6h_0}{s\varepsilon^3}\int_0^\pi \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\cos\varphi\right)^3} + \\ + Re_z^*\left[\frac{B}{e^3}\int_0^\pi \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\cos\varphi\right)^3} + \int_0^\pi\left(\frac{K_1}{2}+\frac{K_2}{10/3}+\frac{K_3}{5}+\frac{K_4}{7}\right)\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{\frac{1}{\varepsilon}+\cos\varphi}\right] \equiv S_2(\varepsilon).\end{aligned}\right\} \tag{7,10}$$

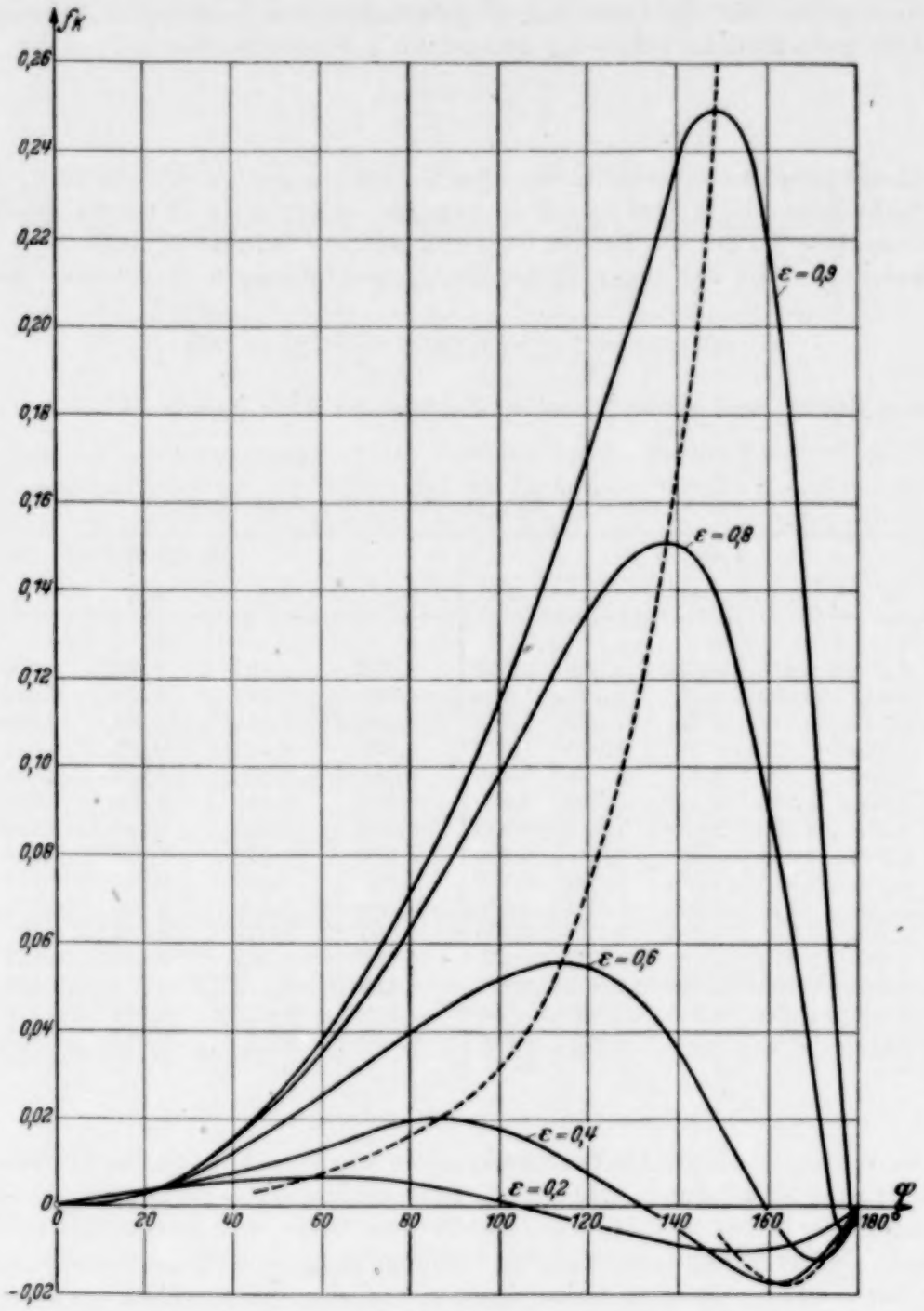

Abb. 12. Druckverteilung der Korrekturströmung im Zapfenlager.

Hier teilen sich also die Funktionen auf:

$$\left.\begin{aligned} C_2(\varepsilon) &\equiv C_1(\varepsilon) + Re_z^*\ C_K(\varepsilon)\,, \\ S_2(\varepsilon) &\equiv S_1(\varepsilon) + Re_z^*\ S_K(\varepsilon)\,, \end{aligned}\right\} \tag{7,11}$$

wobei $C_1(\varepsilon)$ und $S_1(\varepsilon)$ die bekannte erste Näherung ist. Für die Korrekturfunktionen $C_K(\varepsilon)$ und $S_K(\varepsilon)$ ergibt Integration und Zusammenfassung die Werte

$$\left.\begin{aligned} C_K(\varepsilon) = \frac{432}{35\pi}\,\frac{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(2+\varepsilon^2)^3} - \left(27\pi + \frac{24}{\pi}\right)\frac{1}{35}\,\frac{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(2+\varepsilon^2)^2} + \frac{3}{35}\,\pi\,\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}-(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon(2+\varepsilon^2)} + \\ + \frac{\pi}{7}\,\frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} - \frac{4}{7\pi}\,\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2+\varepsilon^2}\,ln\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\,, \end{aligned}\right\} \tag{7,12}$$

$$S_K(\varepsilon) \equiv -\frac{324}{35}\,\frac{\varepsilon^2}{(2+\varepsilon^2)^3} + \frac{18}{5}\,\frac{\varepsilon^2}{(2+\varepsilon^2)^2} - \frac{6}{35}\,\frac{1}{2+\varepsilon^2} + \frac{2}{7} - \frac{1}{5}\,\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon(2+\varepsilon^2)}\,ln\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\,. \tag{7,13}$$

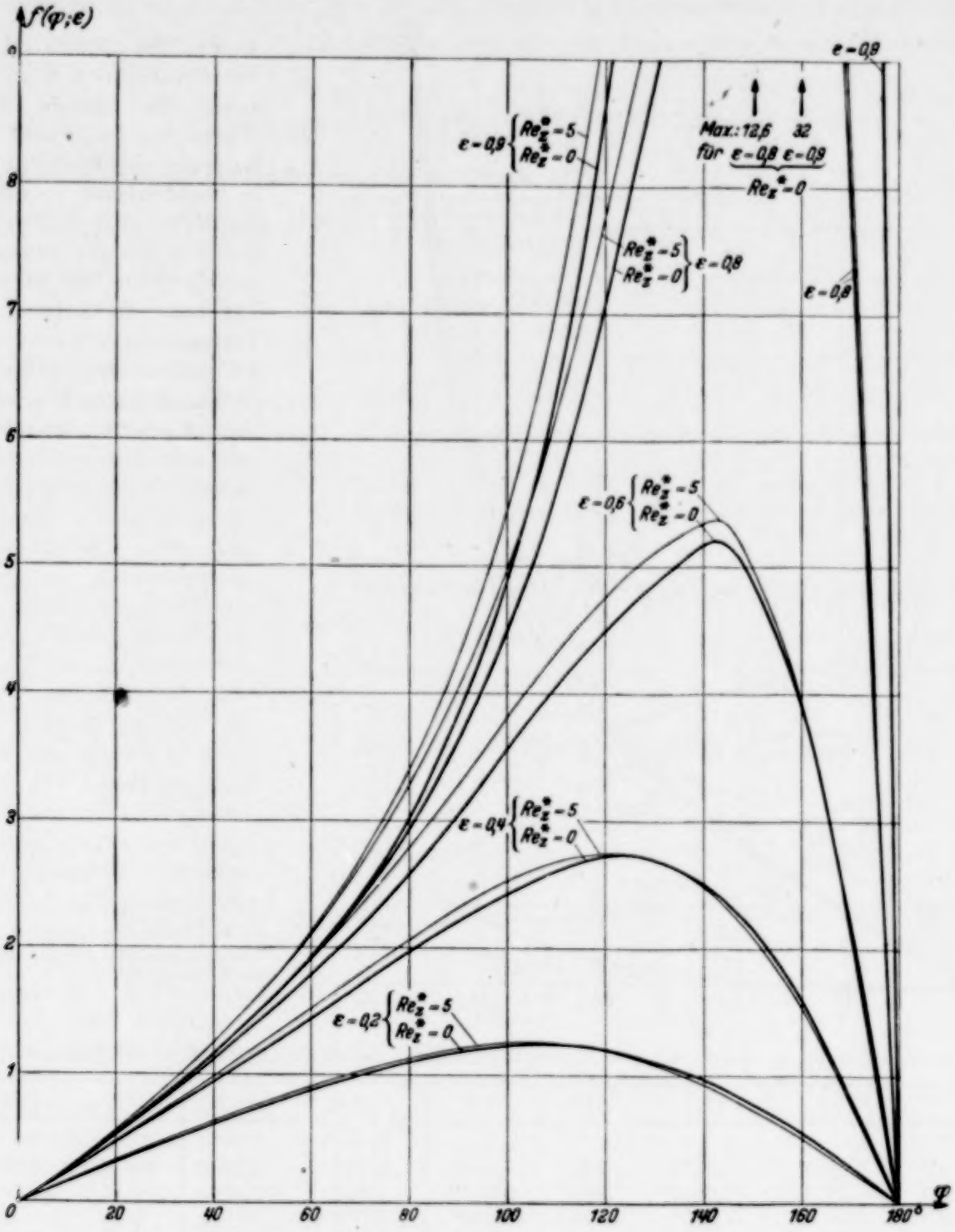

Abb. 13. Druckverteilung im Zapfenlager.

Bei Vernachlässigung von kleinen Gliedern zweiter Ordnung läßt sich auch die neue Lagerzahl aufteilen:

$$L_2(\varepsilon) = L_1(\varepsilon) + Re_z^* \; L_K(\varepsilon)\,, \tag{7,14}$$

und man erhält die zur alten Lösung hinzutretende Korrektur

$$L_K(\varepsilon) = \frac{S_1(\varepsilon)\, S_K(\varepsilon) + C_1(\varepsilon)\, C_K(\varepsilon)}{L_1(\varepsilon)}\,. \tag{7,15}$$

Ebenso läßt sich der neue Verlagerungswinkel berechnen:

$$\psi_2(\varepsilon) = \psi_1(\varepsilon) + Re_z^* \; \psi_K(\varepsilon)\,, \tag{7,16}$$

wobei die Winkelkorrektur

$$\psi_K(\varepsilon) = \frac{C_1(\varepsilon)\, S_K(\varepsilon) - S_1(\varepsilon)\, C_K(\varepsilon)}{L_1(\varepsilon)^2} \tag{7,17}$$

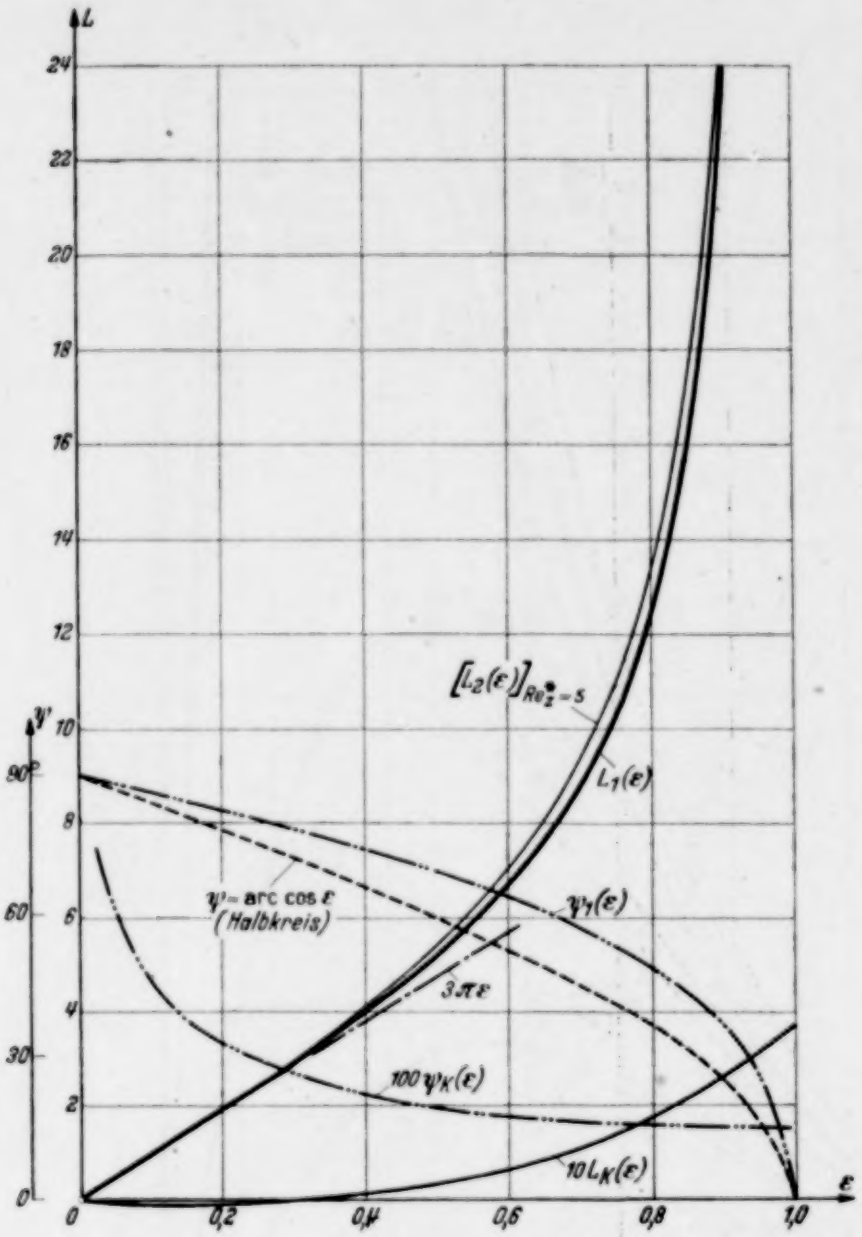

Abb. 14. Lagerzahl und Verlagerungswinkel des Wellenmittels.

wird. Die numerischen Werte der Funktionen $C(\varepsilon)$ und $S(\varepsilon)$ sowie die daraus errechneten Werte für Lagerzahl und Verlagerung des Wellenmittels sind in Zahlentafel 4 eingetragen. Die Korrektur der Verlagerungskurve $\psi_K(\varepsilon)$ ist verschwindend gering (Abb. 10). Man kann als Ergebnis festhalten, daß die Verlagerungskurve von der Trägheit des Schmiermittels praktisch nicht beeinflußt wird. Die Kurven für die Lagerzahl und deren Korrektur zeigt Abb. 14.

Zahlentafel 4. *Lagerzahl* und *Verlagerungswinkel des Wellenmittels beim Zapfenlager.*

ε	$C_1(\varepsilon)$	$C_K(\varepsilon)$	$S_1(\varepsilon)$	$S_K(\varepsilon)$	$L_1(\varepsilon)$	$L_K(\varepsilon)$	$\psi_1(\varepsilon)$	$\psi_K(\varepsilon)$
0	0	0	0	0	0	0	90°	0
0,1	0,0603	−0,0075	0,9425	0,0003	0,945	−0,0002	86,34°	0,46°
0,2	0,2451	−0,0107	1,8861	0,0019	1,902	+0,0005	82,67°	0,33°
0,3	0,5679	−0,0138	2,8361	0,0069	2,893	+0,0041	78,68°	0,26°
0,4	1,0582	−0,0125	3,8087	0,0183	3,954	+0,0169	74,47°	0,22°
0,5	1,7778	−0,0055	4,8369	0,0377	5,154	+0,0334	69,82°	0,15°
0,6	2,8602	+0,0104	5,9903	0,0669	6,638	+0,0648	64,48°	0,17°
0,7	4,6303	+0,0387	7,4206	0,1061	8,748	+0,1105	58,04°	0,16°
0,8	8,0808	+0,0847	9,5200	0,1545	12,490	+0,1726	49,67°	0,16°
0,85	11,4760	+0,1216	11,2741	0,1820	16,090	+0,2142	44,49°	0,15°
0,9	18,2056	+0,1626	13,8500	0,2118	22,880	+0,2576	37,26°	0,15°
0,95	38,2694	+0,2288	19,7583	0,2452	43,070	+0,3158	27,31°	0,15°
1,0	∞	+0,4488	∞	0,2857	∞	+0,3700	0	0,15°

Für die von der Korrekturströmung hervorgerufene Schubspannung ergibt sich beim Zapfenlager an der Lagerschale ($y=0$)

$$\tau_{0K}(\varphi;\varepsilon) = \mu \left.\frac{\partial u_K}{\partial y}\right|_{y=0} = -\frac{\mu U}{s} Re_z^*\; b_K(\varphi;\varepsilon) = -\varrho U^2 \frac{s}{r}\; b_K(\varphi;\varepsilon) \qquad (7,18)$$

mit

$$b_K(\varphi;\varepsilon) = \varepsilon\left[\sin\varphi\left(\frac{K_1}{12} + \frac{K_2}{15} + \frac{K_3}{20} + \frac{K_4}{105/4}\right) + \frac{B/e^3}{2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \cos\varphi\right)^2}\right]. \qquad (7,19)$$

und daraus durch Integration über den halben, tragenden Umfang das Reibungsmoment

$$N_K(\varepsilon) = \frac{\mu U r^2}{s} Re_z^* \; V_K(\varepsilon) = \varrho U^2 r s \, V_K(\varepsilon) \tag{7,20}$$

mit

$$V_K(\varepsilon) \equiv \varepsilon \left[\frac{108}{35} \frac{1-\varepsilon^2}{(2+\varepsilon^2)^3} - \frac{18}{35} \frac{1-\varepsilon^2}{2+\varepsilon^2} - \frac{2}{35} \right]. \tag{7 21}$$

Der korrigierte Reibungskoeffizient wird dann mit (6, 17)

$$w_2(\varepsilon) = \frac{s}{r} \frac{V_1(\varepsilon)}{L_1(\varepsilon)} \left\{ 1 + Re_z^* \left[\frac{V_K(\varepsilon)}{V_1(\varepsilon)} - \frac{L_K(\varepsilon)}{L_1(\varepsilon)} \right] \right\} = w_1(\varepsilon) \left\{ 1 + Re_z^* \; m(\varepsilon) \right\}, \tag{7, 22}$$

worin die Korrekturfunktion

$$m(\varepsilon) \equiv \frac{V_K(\varepsilon)}{V_1(\varepsilon)} - \frac{L_K(\varepsilon)}{L_1(\varepsilon)} \tag{7, 23}$$

wieder klein gegenüber 1 ist. Numerische Werte für Reibungsmoment und Reibungskoeffizient finden sich in Abb. 15. Das Reibungsmoment der Korrektur wird bei Werten $\varepsilon > 0{,}7$ negativ, d. h., das Moment wird in der zweiten Näherung dort kleiner als in der ersten. Wenn man den Exzentrizitäten ε für den Gleitschuh definierte $k = a/l$-Werte (2,7) zuordnet, wie in Abschn. 8 gezeigt wird, liegt das Gebiet der negativen Momente bei $k < 1{,}2$. Ein ähnliches Ergebnis war schon beim ebenen Gleitschuh erhalten worden, wo die Korrektur der Schubspannung bei sehr kleinen k-Werten auch negativ wurde. Auch die Korrekturfunktion für den Reibungskoeffizienten $m(\varepsilon)$ wird im Gebiet $0{,}5 < \varepsilon < 1$ negativ. Dies entspricht genau dem Ergebnis beim ebenen Gleitschuh, wo $m(k)$ im Gebiet $1{,}5 > k > 1{,}0$ negativ, also der Reibungskoeffizient erniedrigt wurde.

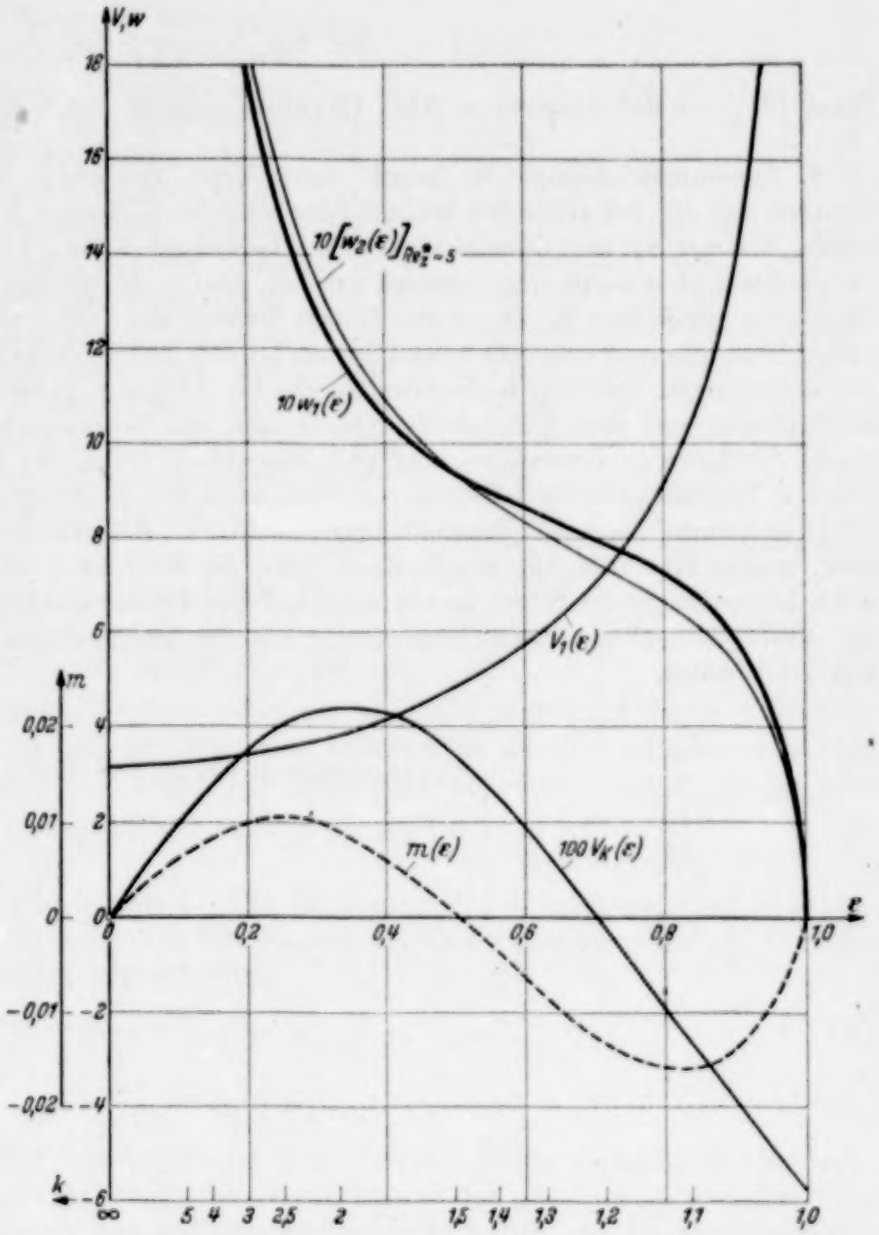

Abb. 15. Reibungsmoment, Reibungskoeffizient und Korrekturfunktion beim Zapfenlager

8. Vergleich von Gleitschuh und Zapfenlager. Um die Ergebnisse von Zapfenlager und Gleitschuh vergleichen zu können, muß man eine geeignete Beziehung zwischen den Parametern $k = a/l$ und $\varepsilon = e/s$ suchen. Streckt man den halbsichelförmigen Schmierspalt des Zapfenlagers und ersetzt die Kosinusfunktion der Schmierschichtdicke durch eine gerade Linie durch die Ein- und Austrittspunkte, so kann man einen k-Wert angeben:

$$k = \frac{d}{l} = \frac{h_E}{h_E - h_A} \triangleq \frac{s+e}{2e} = \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}. \tag{8, 1}$$

Die inverse Funktion ist

$$\varepsilon = \frac{e}{s} \triangleq \frac{1}{2k-1}. \tag{8, 2}$$

Es entsprechen sich an den Grenzen

$$\varepsilon = 0 : k = \infty , \quad \varepsilon = 1 : k = 1 .$$

Will man die Re^*-Zahlen aufeinander zurückführen, so muß man beachten, daß beim Gleitschuh Re_s^* mit der Eintrittsdicke h_E und der Gleitschuhlänge 1 gebildet wurde, dagegen beim Zapfenlager Re_z^* mit der mittleren Schmierschichtdicke, dem Lagerspiel $s = R - r$, und dem Zapfenhalbmesser r. Behält man die Bezugsgrößen vom Gleitschuh bei, so erhält man die Relation

$$Re_s^* = \frac{U l}{\nu} \left(\frac{h_E}{l}\right)^2 \triangleq \frac{U \pi r}{\nu} \left(\frac{s+e}{\pi r}\right)^2 = \frac{U r}{\nu} \left(\frac{s}{r}\right)^2 \frac{1}{\pi} \left(\frac{s+e}{s}\right)^2 = \frac{(1+\varepsilon)^2}{\pi} \, Re_z^* . \tag{8,3}$$

Die Re_z^*-Zahlen des Zapfenlagers sind also mit dem Faktor $(1+\varepsilon)^2/\pi$ zu versehen, wenn man sie mit den entsprechenden Re_s^*-Werten beim Gleitschuh vergleichen will. Für den umgekehrten Fall wird die inverse Funktion mit (8,1)

$$Re_z^* \triangleq \pi \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^2 Re_s^* . \tag{8,4}$$

Nach (8,1) ist die Abszisse in Abb. 15 zum Vergleich mit k-Werten versehen worden.

9. Zusammenfassung. Es wurde untersucht, inwieweit die Trägheit des Schmiermittels Einfluß auf die Schmiermittelreibung der unendlich breiten Gleitlager hat, die man nach *Reynolds*, *Sommerfeld* und *Gümbel* theoretisch berechnen kann. Die Trägheitsgrößen, die bisher als vernachlässigbar klein angenommen wurden, sind in der vorliegenden Arbeit in einem Iterationsverfahren als äußere Kräfte in die *Navier-Stokes*schen Differentialgleichungen für die Bewegung zäher Flüssigkeiten eingeführt, und daraus ist eine zweite Näherung der Theorie erhalten worden. Es zeigte sich, daß die Korrektur durch die Trägheit proportional der *Reynolds*schen Zahl, multipliziert mit dem Quadrat des Quotienten aus Schmierschichtdicke und Lagerlänge, gehen muß. Sie kann in Grenzfällen auf 10 % der ersten Näherung und darüber wachsen. Und zwar werden Tragfähigkeit und Reibungsgrößen, auch der Reibungskoeffizient im allgemeinen größer erhalten, wenn man die Trägheit berücksichtigt. Bei starker Schrägstellung des Gleitschuhs bzw. großer Exzentrizität des Zapfens kann die Korrektur für $k = a/l < 1{,}05$ bzw. $\varepsilon = e/s > 0{,}7$ auch kleine negative Werte annehmen. Auf die Druckpunktlage beim ebenen Gleitschuh bzw. die Verlagerungskurve beim Zapfenlager hat die Trägheit des Schmiermittels keinen nennenswerten Einfluß.

(Eingegangen am 24. Juli 1947.)

Über die Bewegung eines stabilen schweren symmetrischen Kreisels bei kleinen Störungen des Längsschwunges.

Von **K. Stange** in Bad Sachsa.

1. Einführung. In einer früheren Arbeit[1] wurde die Bewegung untersucht, welche ein stabiler, schwerer symmetrischer Kreisel ausführt, wenn sein Schwung $\mathfrak{S}$ zu Beginn der Bewegung ($t=0$) in der Kreiselachse $\mathfrak{a}_0$ liegt ($\mathfrak{S}_0 = S_0 \mathfrak{a}_0$) und diese einen „kleinen" Winkel $\alpha_0 \neq 0$ mit der raumfesten senkrechten Richtung $\mathfrak{e}$ bildet ($|\mathfrak{e}|=1$). Der Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ hat die zur Erdbeschleunigung entgegengesetzte Richtung. Es zeigte sich, daß die Bewegung bei Einführung von dimensionslosen Veränderlichen von einem einzigen Parameter, der Stabilitätszahl σ des Kreisels, abhängt. Wir wollen die Untersuchung jetzt auf den Fall ausdehnen, daß die Kreiselrichtung $\mathfrak{a}$ anfangs mit der Richtung $\mathfrak{e}$ zusammenfällt, jedoch der Schwung $\mathfrak{S}$ den „kleinen" Winkel $\varepsilon_0 \neq 0$ mit der Richtung $\mathfrak{e}$ bildet. Wir beziehen die Bewegung nach Abb. 1 auf ein rechtwinkliges, räumliches Achsenkreuz X, Y, Z, dessen positive Z-Achse senkrecht nach oben zeigt. Der Z-Achse ist dann der Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ zugeordnet. Ohne die Allgemeinheit der Untersuchung irgendwie einzuschränken, dürfen wir voraussetzen, daß der „Querschwung" $\mathfrak{S}_B(0)$ anfangs in der $+Y$-Achse liegt. Dann ist also

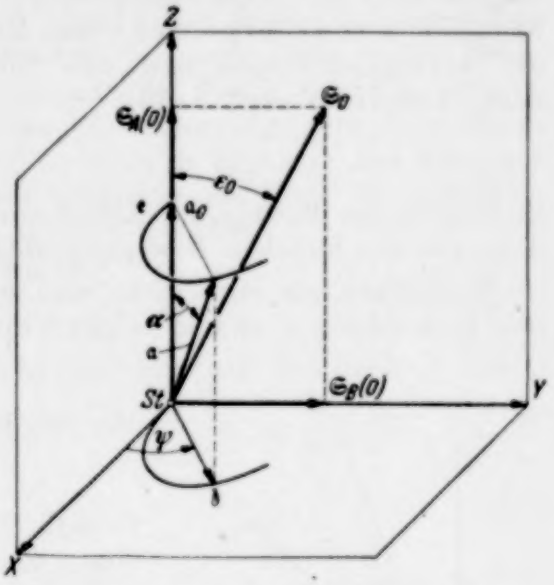

Abb. 1. Zur Veranschaulichung der Anfangsbedingungen.

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{e} = e\,\{0,\ 0,\ 1\} \tag{1}$$

und

$$\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}_0\,\{0,\ S_0 \sin\varepsilon_0,\ S_0 \cos\varepsilon_0\}\,. \tag{2}$$

Die jeweilige Lage der Kreiselachse kennzeichnen wir wie früher entweder durch ihren Neigungswinkel α gegen die Richtung $\mathfrak{e}$ und den Winkel ψ, welchen die durch $\mathfrak{a}$ gelegte senkrechte Ebene mit der (X, Z)-Ebene bildet, oder durch ihre drei Richtungswerte x, y, z. Es ist also

$$\mathfrak{a} = a\,\{\sin\alpha\cos\psi,\ \sin\alpha\sin\psi,\ \cos\alpha\} = a\,\{x, y, z\}\,. \tag{3}$$

2. Die Bewegungsgleichungen für α und ψ. Die Bewegung der Kreiselachse ist bekannt, wenn wir entweder α und ψ oder x und y als Funktionen der Zeit t bestimmt haben. Die Bewegungsgleichungen sind (ungeändert gegen früher)

$$\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = G\,l\,[\mathfrak{e}\ \mathfrak{a}]\,, \tag{4_1}$$

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \frac{1}{B}\,[\mathfrak{S}\,\mathfrak{a}]\,. \tag{4_2}$$

In diesen Gleichungen ist (außer den bereits erklärten Größen) G das Gewicht des Kreisels, l der Abstand vom Stützpunkt zum Schwerpunkt, B die Drehmasse für eine „Querachse" $\perp \mathfrak{a}$ durch den Stützpunkt St. Führen wir den auf den Anfangswert $S_A(0)$ des „Längsschwunges" bezogenen Schwungvektor

$$\mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{S}}{S_A(0)} = \frac{\mathfrak{S}}{S_0\cos\varepsilon_0}\,, \tag{5_1}$$

die „dimensionslose Zeit"

$$\tau = \frac{S_0\cos\varepsilon_0}{B}\,t \tag{5_2}$$

und die Stabilitätszahl σ des Kreisels

$$\sigma = \frac{S_A^2(0)}{4\,BGl} = \frac{S_0^2\cos^2\varepsilon_0}{4\,BGl} \tag{5_3}$$

---

[1] *K. Stange*, Ing.-Arch. 16 (1947) S. 121.

ein, so werden die Bewegungsgleichungen (gegen früher ungeändert)

$$\frac{d\,\mathfrak{s}}{d\,\tau} = \dot{\mathfrak{s}} = \frac{1}{4\,\sigma}\,[\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}] \tag{6_1}$$

und

$$\frac{d\,\mathfrak{a}}{d\,\tau} = \dot{\mathfrak{a}} = [\mathfrak{s}\,\mathfrak{a}]\,. \tag{6_2}$$

Die Anfangsbedingungen sind (anders als früher)

$$\mathfrak{a}(0) = \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{e} \quad \text{und} \quad \mathfrak{s}(0) = \mathfrak{s}_0\{0\,,\ \mathrm{tg}\,\varepsilon_0\,,\ 1\}\,. \tag{6_3}$$

In den Bewegungsgleichungen (6_1; 6_2) und den Anfangsbedingungen (6_3) spielen im Gegensatz zu der nicht dimensionslosen Form, welche die vier Parameter Gl, B, S_0 und ε_0 enthält, nur noch zwei Parameter eine Rolle, die Stabilitätszahl σ des Kreisels und die Neigung ε_0 des Anfangsschwunges bzw. das Verhältnis von „Querschwung" oder „Störschwung" $S_B(0)$ zum „Längsschwung" $S_A(0)$

$$\frac{S_B(0)}{S_A(0)} = \mathrm{tg}\,\varepsilon_0 \tag{6_4}$$

zu Beginn der Bewegung. Alle Kreisel mit übereinstimmendem Wertepaar σ und ε_0 besitzen demnach den gleichen Bewegungsablauf über τ.

Bezeichnen wir mit $s_A = \mathfrak{s}\,\mathfrak{a}$ und $s_E = \mathfrak{s}\,\mathfrak{e}$ die Komponenten des bezogenen Schwunges $\mathfrak{s}$ nach den Richtungen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}$, so gilt (unverändert gegen früher)

$$s_A = \text{konst} \quad \text{und} \quad s_E = \text{konst}. \tag{7_1}$$

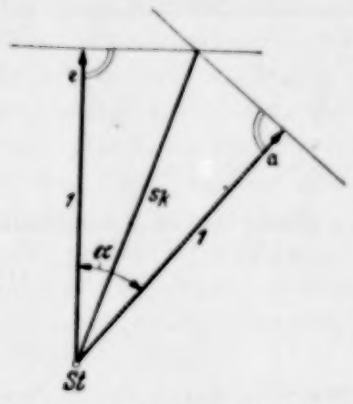

Abb. 2. Zur Berechnung des Schwunganteils s_K.

Mit den jetzt geltenden Anfangsbedingungen (6_3) wird

$$s_A = 1 \quad \text{und} \quad s_E = 1\,. \tag{7_2}$$

Gemäß Abb. 2 gilt also für den bezogenen Schwung s_K in der von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}$ gebildeten Ebene

$$s_K = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\,. \tag{8}$$

Der zur Ebene $(\mathfrak{a}, \mathfrak{e})$ senkrechte Anteil s_M des bezogenen Schwunges wird (wie früher)

$$s_M = \dot{\alpha}\,. \tag{9}$$

Für den Betrag s des bezogenen Gesamtschwunges gilt nun

$$s^2 = s_K^2 + s_M^2 \tag{10_1}$$

oder wegen (8) und (9)

$$s^2 = 1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \dot{\alpha}^2\,. \tag{10_2}$$

Für die „zeitliche" Ableitung von s^2 finden wir (wie früher)

$$(s^2)^{\cdot} = -\frac{1}{2\,\sigma}\,(\cos\alpha)^{\cdot}\,. \tag{11_1}$$

Daraus folgt

$$s^2 = \text{konst} - \frac{1}{2\,\sigma}\cos\alpha\,. \tag{11_2}$$

Mit der Anfangsbedingung (6_3) $s_0^2 = 1 + \mathrm{tg}^2\,\varepsilon_0$ und $\alpha_0 = 0$ kommt

$$s^2 = 1 + \mathrm{tg}^2\,\varepsilon_0 + \frac{1}{2\,\sigma}(1 - \cos\alpha)\,,$$

oder nach Einführung des halben Winkels $\alpha/2$,

$$s^2 = 1 + \mathrm{tg}^2\,\varepsilon_0 + \frac{1}{\sigma}\sin^2\frac{\alpha}{2}\,. \tag{11_3}$$

Die Verknüpfung von (10_2) und (11_3) liefert

$$\dot{\alpha}^2 = \mathrm{tg}^2\,\varepsilon_0 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\sigma}\sin^2\frac{\alpha}{2}\,, \tag{12}$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung für α, die sich durch Trennung der Veränderlichen

integrieren läßt. Sie stimmt mit den von *Grammel*[1] aufgestellten Gleichungen überein, wenn man die dort gegebene andere Form auf unsere Bezeichnungen umrechnet.

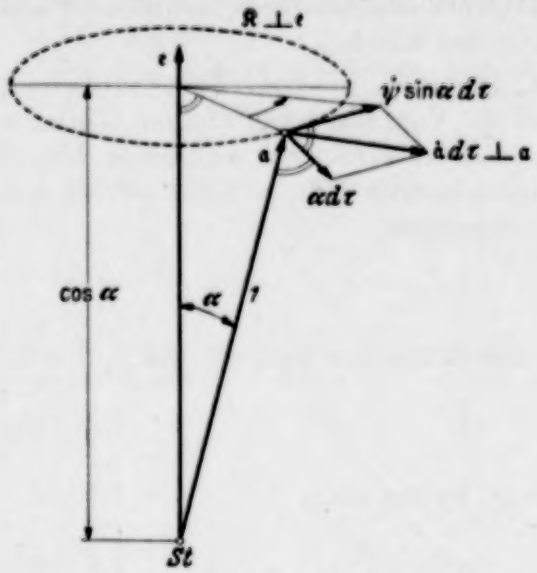

Abb. 3. Zur Herleitung von Gleichung (13). ($\alpha d\tau$ ist durch $\dot{\alpha} d\tau$ zu ersetzen.)

Zur Bestimmung des zeitlichen Verlaufs von ψ finden wir (wie früher)

$$\left|\dot{\mathfrak{a}}\right|^2 = \dot{\alpha}^2 + (\dot{\psi}\sin\alpha)^2 . \tag{13}$$

Das geht auch aus Abb. 3 unmittelbar hervor, wenn man berücksichtigt, daß die „augenblickliche Bewegung" des Vektors $\mathfrak{a}$ aus einer Änderung des Neigungswinkels α um den Wert $d\alpha = \dot{\alpha} d\tau$ und aus einer Drehung um den raumfesten Vektor $\mathfrak{e}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ besteht. Auf Grund der ersten Teilbewegung besitzt der Endpunkt von $\mathfrak{a}$ die Bahngeschwindigkeit $\dot{\alpha} \perp \mathfrak{a}$ in der durch $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{a}$ gelegten Ebene. Die zweite Teilbewegung gibt die Bahngeschwindigkeit $\dot{\psi}\sin\alpha \perp \mathfrak{a}$ in Richtung der Tangente an den gestrichelt angedeuteten Kreis $\mathfrak{R}$. Damit ist die Formel (13) anschaulich klar.

Weiter ist nach (6_2)

$$\left|\dot{\mathfrak{a}}\right| = s\sin(\mathfrak{s}, \mathfrak{a}) . \tag{14$_1$}$$

Zerlegen wir $\mathfrak{s}$ nach der Richtung $\mathfrak{a}$ und senkrecht dazu in s_A und s_B, so gilt demnach

$$\left|\dot{\mathfrak{a}}\right| = s_B = \sqrt{s^2 - s_A^2} \tag{14$_2$}$$

oder mit (7_2) und (10_2)

$$\left|\dot{\mathfrak{a}}\right|^2 = \dot{\alpha}^2 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} . \tag{14$_3$}$$

Verknüpft man (13) mit (14_3), so erhält man schließlich

$$\dot{\psi} = \frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) . \tag{15}$$

3. Beschränkung der Lösung auf kleine Neigungswinkel. Wir wollen die bekannte strenge Lösung der Gleichungen (12) und (15) nicht weiter verfolgen, sondern uns dem Sonderfall „kleiner" Winkel ε_0, d. h. dem Sonderfall „kleiner" Störungen $\mathfrak{S}_B(0)$ des Schwunges zuwenden. Setzen wir zunächst einmal voraus, daß es sich um einen kräftig stabilisierten Kreisel handelt. Dann ist σ eine „große" Zahl, und aus (12) folgt, daß $\dot{\alpha}$ verschwindet, wenn $\alpha/2 \approx \varepsilon_0$ oder $\alpha = \alpha_1 \approx 2\varepsilon_0$ geworden ist. Der größte vorkommende Neigungswinkel α_1 hat also die Größenordnung $2\varepsilon_0$. Ist nun ε_0 so „klein", daß wir

$$\operatorname{tg}\varepsilon_0 \approx \varepsilon_0 \tag{16$_1$}$$

setzen dürfen, dann ist die entsprechende Näherung auch stets bei α erlaubt, sofern σ „nicht zu klein" wird. Die vorläufig noch unbestimmten Aussagen über ε_0 und σ werden wir später noch genauer fassen. Mit den Näherungen (16_1) sowie

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} \tag{16$_2$}$$

nehmen (12) und (15) die Form

$$\dot{\alpha}^2 = \varepsilon_0^2 - \frac{\sigma-1}{\sigma}\frac{\alpha^2}{4} \tag{17$_1$}$$

und

$$\dot{\psi} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right) \tag{17$_2$}$$

an.

Führen wir in (17_1) als neue Veränderliche

$$\frac{\alpha}{\varepsilon_0} = \beta \quad \text{mit} \quad \beta(0) = 0 \tag{18$_1$}$$

ein, so kommt für β

$$\dot{\beta}^2 = 1 - \frac{\sigma-1}{\sigma}\frac{\beta^2}{4} \quad \text{oder} \quad \ddot{\beta} = -\frac{\sigma-1}{4\sigma}\beta . \tag{18$_2$}$$

[1] *R. Grammel*, Der Kreisel. Braunschweig 1920, S. 98, Gl. (6) und S. 108, Gl. (40).

Aus der letzten Gleichung ist ersichtlich, daß der Bewegungsablauf bei „kleinen" Störungen des Schwunges vom Anfangswert ε_0 unabhängig wird. Es liegen also ähnliche Verhältnisse wie bei den Pendelschwingungen mit kleinem Ausschlagwinkel vor. Der einzige wesentliche Parameter, der in die Bewegung eingeht, ist die Stabilitätszahl σ des Kreisels.

Die Gleichung (18_2) lehrt weiter, daß $\sigma > 1$ sein muß. Denn für $\sigma = 1$ ist $\dot{\beta} = 1$ oder $\beta = \tau$, d. h. β und damit nach (18_1) auch α wächst mit τ, so daß die Voraussetzung kleiner Winkel α zwar anfangs zutrifft, wenn ε_0 klein ist, aber später sicher verletzt wird. Den wirklichen Ablauf der Bewegung für $\sigma = 1$ können wir mit den Näherungsgleichungen $(17_{1,2})$ nicht berechnen. Dazu müßten wir auf die genaue Form (12) und (15) zurückgreifen.

Für den stabilen Kreisel mit

$$\sigma > 1$$

ist die Lösung von (18_2) bei Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $\beta(0) = 0$ und $\dot{\beta}(0) = 1$

$$\beta = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\,\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\,\tau\right). \tag{18_3}$$

Die Größe β macht also eine einfache sin-Schwingung. Es ist stets

$$\beta_0 = 0 \leqq \beta \leqq \beta_1 = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{18_4}$$

und damit nach (18_1)

$$0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1$$

mit

$$\alpha_1 = 2\,\varepsilon_0\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\,. \tag{19_1}$$

Der Neigungswinkel α schwankt demnach periodisch zwischen dem Anfangswert Null und dem größten Wert α_1 hin und her. Er hat (abgesehen vom Vorzeichen) den gleichen Wert wieder erreicht, wenn $\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma-1)/\sigma}\,\tau$ um den Betrag π gewachsen ist. Daraus folgt als Schwingdauer τ_N der Bewegung

$$\tau_N = 2\,\pi\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\,. \tag{19_2}$$

Führt man β_1 und τ_N in (18_3) ein, so wird[1]

$$\beta = \beta_1 \sin\left(\pi\,\frac{\tau}{\tau_N}\right). \tag{19_3}$$

Da der Neigungswinkel α bisher stillschweigend positiv gerechnet wurde, nach (19_3) aber negativer Werte fähig ist, so haben wir die Bedeutung dieser negativen Werte noch zu untersuchen. Wir wollen diese Überlegung jedoch zurückstellen, bis wir auch $\psi(\tau)$ bestimmt haben. Gleichung (19_1) bestätigt, daß für große Werte von σ der größte Neigungswinkel α_1 nahezu gleich $2\,\varepsilon_0$ wird; denn es gilt für große σ

$$\alpha_1 \approx 2\,\varepsilon_0\left(1 + \frac{1}{2\,\sigma}\right). \tag{19_4}$$

Formel (19_1) liefert uns weiter die Handhabe, den Gültigkeitsbereich unserer Näherung abzuschätzen und die unbestimmten Aussagen, daß ε_0 „klein" und σ „nicht zu nahe bei 1" liegen darf, genauer zu umreißen. Damit unsere Näherung noch brauchbar ist, müssen wir verlangen, daß der größte Neigungswinkel α_1 noch ein „kleiner" Winkel ist, dessen Größe im wesentlichen durch den Gültigkeitsbereich von (16_2) bestimmt wird. Bei gegebenem größtem Wert $\alpha_1 = \alpha_{max}$ läßt sich aus (19_1) zu $\sigma > 1$ der erlaubte Betrag von ε_0, also die zulässige „Störung", und bei bekannter „Störung" ε_0 die notwendige Stabilitätszahl σ berechnen. Da $\alpha_1 > 2\,\varepsilon_0$ wird, so muß, unabhängig von σ, jedenfalls $\varepsilon_0 < \frac{1}{2}\,\alpha_{max}$ sein.

Setzt man in (12) $\dot{\alpha} = 0$, so gewinnt man eine quadratische Gleichung für $u = \mathrm{tg}^2(\alpha_1/2)$, aus der sich der größte Neigungswinkel $\alpha_1 = \alpha_1^*$ genau berechnen läßt. Vergleicht man den auf diese Weise gefundenen Wert α_1^* mit dem Näherungswert α_1 aus (19_1), so gewinnt man ebenfalls ein Bild über die Brauchbarkeit der Näherung. Betrachten wir dazu Abb. 4, wo das Winkelverhältnis α_1^*/ε_0 für die beiden festen Werte $\varepsilon_0 = 0{,}1$ und $\varepsilon_0 = 0{,}2$ über σ aufgetragen ist. Entfernt

[1] $\beta = \beta_1$ ist übrigens eine singuläre Lösung der Differentialgleichung (18_2). Wir werden später sehen, daß $\beta = \beta_1$ die Einhüllende der von $\mathfrak{a}$ beschriebenen Bahnkurven darstellt.

man sich von dem Wert $\sigma=1$ nach rechts hin, so läuft die Kurvenschar α_1^*/ε_0 in eine einzige, von ε_0 unabhängige Kurve zusammen, und zwar in die von unserer Näherung (19_1) gelieferte Grenzkurve α_1/ε_0. Die Näherung ist für $\varepsilon_0 \lessapprox 0{,}1$ etwa bis $\sigma \approx 1{,}2$ und für $\varepsilon_0 \lessapprox 0{,}2$ bis ungefähr $\sigma \approx 1{,}5$ brauchbar.

Für den Winkel ψ folgt aus (17_2) mit (18_1), (18_3) und (19_2)

$$\dot{\psi} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sigma}{\sigma-1}\varepsilon_0^2 \sin^2\left(\pi \frac{\tau}{\tau_N}\right)\right] \tag{20_1}$$

und daraus durch Integration

$$\psi = \psi_0 + \frac{\tau}{2}\left(1 + \frac{\sigma}{\sigma-1}\frac{\varepsilon_0^2}{2}\right) - \left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)^{3/2}\frac{\varepsilon_0^2}{4}\sin\left(2\pi\frac{\tau}{\tau_N}\right). \tag{20_2}$$

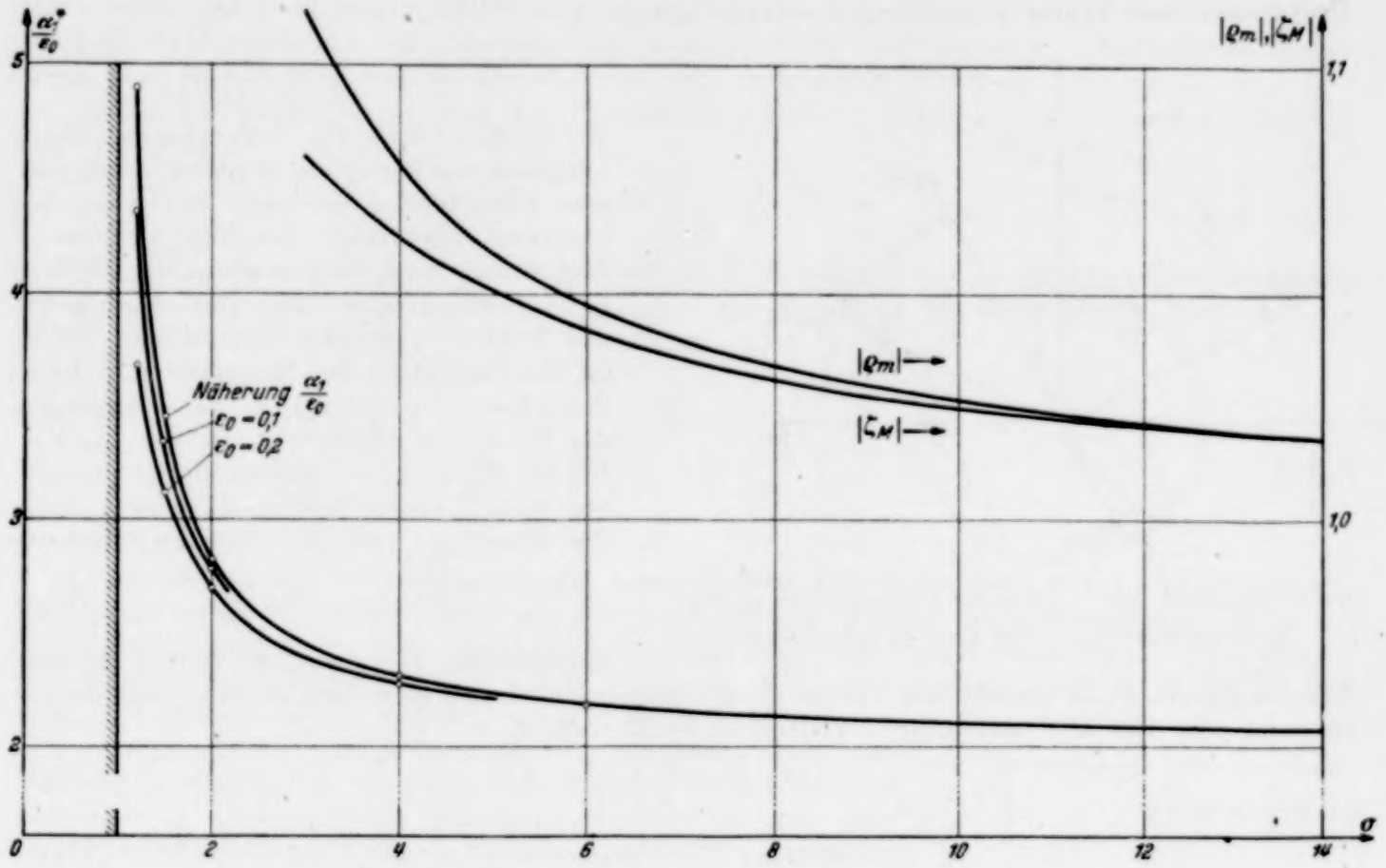

Abb. 4. Mit wachsendem σ wird das Winkelverhältnis α_1/ε_0 von ε_0 und σ unabhängig.

Der Winkel ψ besteht demnach aus einem mit der „Zeit" τ wachsendem Anteil,

$$\psi(\tau) = \psi_0 + \frac{\tau}{2}\left(1 + \frac{\sigma}{\sigma-1}\frac{\varepsilon_0^2}{2}\right), \tag{20_3}$$

und einem mit der Periode τ_N schwingendem Anteil, der bei kleinen Störungen ε_0 wegen der unbedeutenden Amplitude vernachlässigt werden darf, wenn der Kreisel ausreichend stabil ist. Überschreitet nämlich die „Anfangsstörung" $S_B(0)$ des Längsschwunges $S_A(0)$ den Betrag $0{,}1\, S_A(0)$ nicht, so ist

$$\varepsilon_0 \lessapprox 0{,}1\,.$$

Ist der Kreisel außerdem hinreichend stabil,

$$\sigma \gtrapprox 1{,}5\,,$$

so hat das Zusatzglied in (20_3) die Größenordnung

$$\frac{\sigma}{\sigma-1}\frac{\varepsilon_0^2}{2} \lessapprox 1{,}5\cdot 10^{-2}\,,$$

und die Amplitude des schwingenden Anteils ist

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)^{3/2}\frac{\varepsilon_0^2}{4} \lessapprox 1{,}3\cdot 10^{-2}\,.$$

Indem wir noch über den Anfangswert ψ_0 in geeigneter Weise verfügen, dürfen wir demnach in allen diesen Fällen mit ausreichender Genauigkeit

$$\psi(\tau) = \frac{\tau}{2} \qquad \text{und} \qquad \dot{\psi}(\tau) = \frac{1}{2} \tag{20_4}$$

setzen. Bei kleinen Störungen $\varepsilon_0 \lessapprox 0{,}1$ dreht sich die Kreiselachse $\mathfrak{a}$ (nahezu) gleichförmig um die raumfeste Achse $\mathfrak{e}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ dieser Drehung ist (nahezu) unabhängig von der Störung ε_0 und der Stabilitätszahl σ, sofern $\sigma \gtrapprox 1{,}5$ ist.

Die Projektion der Kreiselachse $\mathfrak{a}$ auf die zu $\mathfrak{e}$ senkrechte (X, Y)-Ebene sei $\mathfrak{z}$ (Abb. 1). Dann ist im Rahmen unserer Näherung

$$\mathfrak{z} = \alpha\, e^{i\psi}\,. \tag{21_1}$$

Ordnen wir dem Vektor $\mathfrak{z}$ den Einheitsvektor $\bar{\mathfrak{z}}$ (Abb. 5)

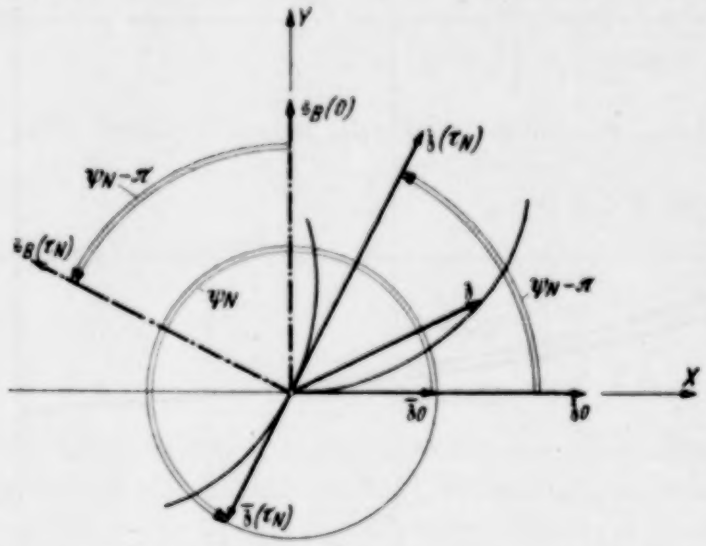

Abb. 5. Während der „Zeit" τ_N dreht sich $\bar{\mathfrak{z}}$ um den Winkel $\psi_N > \pi$, $\mathfrak{z}_B$ um den Winkel $\psi_N - \pi$ und $\dot{\mathfrak{z}}$ um den Winkel $\psi_N + \pi$.

$$\bar{\mathfrak{z}} = \frac{\mathfrak{z}}{|\mathfrak{z}|} = e^{i\psi} \tag{21_2}$$

zu, so dreht sich dieser gemäß den oben hergeleiteten Beziehungen gleichförmig wie ein Uhrzeiger (allerdings in entgegengesetzter Richtung) um den Ursprung. Auf ihm ist vom Ursprung aus der Betrag $|\mathfrak{z}| = |\alpha|$ abzutragen. Die vom Endpunkt des Vektors $\mathfrak{z}$ beschriebene ebene Bahn ist die Projektion der Raumkurve, welche die „Kreiselspitze" (d. h. der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{a}$) beschreibt, in die (X, Y)-Ebene. Man findet Kurven, deren Gestalt aus Abb. 7 ersichtlich ist. Allgemein wird die Kurve $\mathfrak{z}(\tau)$ mit der Geschwindigkeit

$$\dot{\mathfrak{z}} = (\dot{\alpha} + i\,\alpha\,\dot{\psi})\, e^{i\psi} \tag{21_3}$$

durchlaufen. Geht nun der Betrag $|\alpha|$ des Vektors $\mathfrak{z}$ gegen 0, so nimmt der Vektor $\bar{\mathfrak{z}} = e^{i\psi}$ unberührt davon jeweils eine ganz bestimmte Grenzlage ein. Für alle ganzzahligen Vielfachen der Periode τ_N

$$\tau_\nu = \nu\, \tau_N \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{21_4}$$

ist wegen $\alpha_\nu = 0$

$$\dot{\mathfrak{z}}_\nu = \dot{\alpha}_\nu\, e^{i\psi_\nu} = \dot{\alpha}_\nu\, \bar{\mathfrak{z}}_\nu\,. \tag{21_5}$$

Die Grenzlage des Vektors $\bar{\mathfrak{z}}_\nu$ stimmt also je nach dem Vorzeichen von $\dot{\alpha}_\nu$ mit der jeweiligen Geschwindigkeitsrichtung $\pm\dot{\mathfrak{z}}_\nu$ des Endpunktes von $\mathfrak{z}$ überein. Anfangs ist insbesondere nach (6_2) und (6_3)

$$\dot{\alpha}(0) = \dot{\mathfrak{z}}(0) = \dot{\mathfrak{z}}_0\, \{\varepsilon_0, 0\}\,, \tag{21_6}$$

d. h. die Vektoren $\dot{\mathfrak{z}}$ und $\bar{\mathfrak{z}}$ zeigen zu Beginn der Bewegung in Richtung der positiven X-Achse. Rechnen wir also in der üblichen Weise den Drehwinkel ψ gegen den Umlaufsinn des Uhrzeigers von der positiven X-Achse ab, so ist anfangs

$$\psi(0) = \psi_0 = 0\,, \tag{21_7}$$

was wir in (20_4) und (21_1) zugrundegelegt haben.

Auch die Bedeutung negativer Werte von α ist jetzt klar. Während positive Werte vom Ursprung aus in Richtung des Zeigers $\bar{\mathfrak{z}}$ abzutragen sind, hat man bei negativem α die entgegengesetzte Richtung zu wählen.

Nach Ablauf der „Zeit" τ_N ist der „Anfangszustand" jedesmal in dem Sinne wieder erreicht, daß die Kreiselrichtung $\mathfrak{a}$ mit der Richtung $\mathfrak{e}$ zusammenfällt,

$$\mathfrak{a}(\tau_\nu) = \mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{e}\,; \tag{21_8}$$

jedoch ist der Drehwinkel ψ um den Betrag

$$\psi_\nu - \psi_{\nu-1} = \psi_N = \dot{\psi}\, \tau_N = \frac{1}{2}\, \tau_N = \pi \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma - 1}} \tag{21_9}$$

gewachsen. Für große σ ist angenähert

$$\psi_N \approx \pi\left(1+\frac{1}{2\,\sigma}\right). \tag{21_{10}}$$

Stets ist jedenfalls $\psi_N > \pi$.

Der „Anfangszustand" ist (abgesehen von der eben genannten Drehung um ψ_N) vollständig erreicht, wenn auch der bezogene Schwung $\mathfrak{s}$ wieder die ursprüngliche räumliche Lage einnimmt. Das ist für den Anteil $\mathfrak{s}_A = \mathfrak{a}$ in Richtung der Kreiselachse wegen der Beziehung (21_8) ohne weiteres klar. Der zu $\mathfrak{a}$ senkrechte Anteil $\mathfrak{s}_B$ liegt also für $\tau_\nu = \nu\,\tau_N$ in der (X,Y)-Ebene und hat nach (14_2) und (17_1) den Betrag

$$s_B(\tau_\nu) = |\dot{\mathfrak{a}}_\nu| = |\dot{\alpha}_\nu| = \varepsilon_0 = s_B(0).$$

Wir müssen nur noch zeigen, daß $\mathfrak{s}_B(\tau_\nu)$ senkrecht auf $\dot{\mathfrak{a}}_\nu \equiv \dot{\mathfrak{s}}_\nu$ steht. Das folgt aber unmittelbar aus (6_2), da $\dot{\mathfrak{a}}$ senkrecht auf der von $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a}$ gebildeten Ebene steht und $\mathfrak{s}_B$ in dieser Ebene liegt; d. h. $\mathfrak{s}_B$ ist (nicht nur für $\tau_\nu = \nu\,\tau_N$, sondern) stets senkrecht zu $\dot{\mathfrak{a}}$.

Unsere Überlegung zeigt, daß sich der Schwungvektor $\mathfrak{s}$ nach Abb. 5 während der Zeit τ_N um den Winkel

$$\psi_N - \pi = \left(\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - 1\right)\pi$$

gedreht hat. Ohne über die Einzelheiten dieser Bewegung etwas auszusagen, dürfen wir behaupten, daß sich der Schwung $\mathfrak{s}$ im Mittel genommen mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_P = \frac{\psi_N - \pi}{\tau_N}$$

oder

$$\omega_P = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right) \tag{21_{11}}$$

um die Richtung $\mathfrak{e}$ dreht.

4. Die Bewegungsgleichungen für die waagerechten Komponenten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{z}$ von Schwung $\mathfrak{s}$ und Kreiselachse $\mathfrak{a}$. Bisher haben wir die Lage der Kreiselachse $\mathfrak{a}$ im raumfesten (X, Y, Z)-Achsenkreuz durch ihren Neigungswinkel α und den Drehwinkel ψ gekennzeichnet. Jetzt wählen wir dazu die Richtungswerte x, y, z des Vektors $\mathfrak{a}$. Richten wir unser Augenmerk auf die Bewegung des waagerechten Anteils $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{a}$, so ist die Lage von $\mathfrak{z}$ in den vorausgehenden Abschnitten durch Polarkoordinaten α, ψ gegeben, während wir im folgenden dazu rechtwinklige Koordinaten x, y benutzen. Außerdem werden wir auf dem folgenden Wege einen besseren Einblick in die Bewegung des Schwungvektors $\mathfrak{s}$ bekommen.

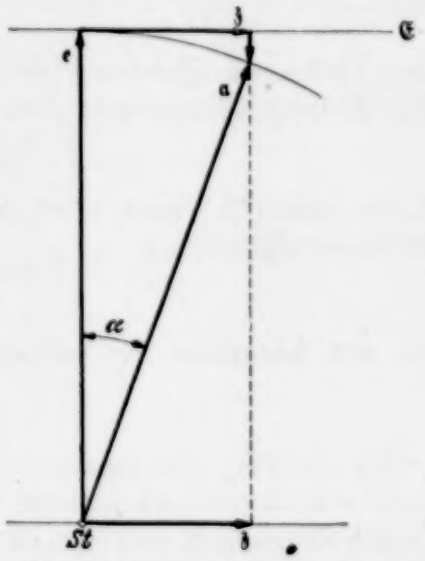

Abb. 6. Die Zerlegung von $\mathfrak{a}$ in den waagerechten Anteil $\mathfrak{z}$ und den senkrechten Anteil $(1-\delta)\,\mathfrak{e}$.

Da der Endpunkt des Schwunges $\mathfrak{s}$ nach (7_1) stets in einer raumfesten, zu $\mathfrak{e}$ senkrechten Ebene liegt, die vom Ursprung den Abstand 1 besitzt, so gilt

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{e} + \mathfrak{r}, \tag{22_1}$$

wobei $\mathfrak{r}$ ein Vektor in der (X, Y)-Ebene ist. Für die Kreiselachse $\mathfrak{a}$ gilt entsprechend (Abb. 6)

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{e} + \mathfrak{z} - \mathfrak{e}\,\delta, \tag{22_2}$$

wobei δ im Vergleich zu $|\mathfrak{z}| \approx \alpha$ und $|\mathfrak{e}| = 1$ ein kleiner Wert der Größenordnung

$$\delta \approx \frac{1}{2}\,\alpha^2$$

ist. Setzt man die Ausdrücke (22_1) und (22_2) in die Bewegungsgleichungen (6_1) und (6_2) ein, so kommt zunächst ohne jede Vernachlässigung

$$\dot{\mathfrak{r}} = \frac{1}{4\,\sigma}\,[\mathfrak{e}\,\mathfrak{z}] \tag{22_3}$$

und

$$\dot{\mathfrak{z}} = [\mathfrak{e}\,\mathfrak{z}] + (1-\delta)\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{e}] + [\mathfrak{r}\,\mathfrak{z}] + \dot{\delta}\,\mathfrak{e}. \tag{22_4}$$

Die Vektoren $\dot{\mathfrak{z}}$, $[\mathfrak{e}\mathfrak{z}]$ und $[\mathfrak{r}\mathfrak{e}]$ liegen in der (X,Y)-Ebene, während $[\mathfrak{r}\mathfrak{z}]$ senkrecht darauf steht. Es ist

$$[\mathfrak{r}\mathfrak{z}] = -|\mathfrak{r}|\,|\mathfrak{z}|\sin(\mathfrak{r},\mathfrak{z})\,\mathfrak{e}\,.$$

Der Vektor (22_4) läßt sich infolgedessen aufspalten in einen für die waagerechte Ebene geltenden Teil

$$\dot{\mathfrak{z}} = [\mathfrak{e}\mathfrak{z}] - (1-\delta)\,[\mathfrak{e}\mathfrak{r}] \approx [\mathfrak{e}(\mathfrak{z}-\mathfrak{r})] \qquad (22_5)$$

und einen für die senkrechte Richtung geltenden Teil

$$\dot{\delta} = |\mathfrak{r}|\,|\mathfrak{z}|\sin(\mathfrak{r},\mathfrak{z})\,. \qquad (22_6)$$

Die letzte Gleichung beschäftigt uns nicht weiter. Sie bestätigt nur die Tatsache, daß die Bewegung bereits vollständig bekannt ist, wenn man ihren waagerechten Anteil $\mathfrak{r}(\tau)$ und $\mathfrak{z}(\tau)$ kennt. In (22_5) vernachlässigen wir δ gegen 1. Außerdem berücksichtigen wir, daß der in der (X, Y)-Ebene gelegene Vektor $[\mathfrak{e}(\mathfrak{z}-\mathfrak{r})]$ aus $\mathfrak{z}-\mathfrak{r}$ hervorgeht, indem man $\mathfrak{z}-\mathfrak{r}$ um $\pi/2$ dreht, d. h. mit i multipliziert. Es ist also

$$[\mathfrak{e}(\mathfrak{z}-\mathfrak{r})] = i(\mathfrak{z}-\mathfrak{r})$$

und entsprechend

$$[\mathfrak{e}\,\mathfrak{z}] = i\,\mathfrak{z}\,.$$

Damit erhält man aus (22_3) und (22_5) zur Berechnung der „Horizontalbewegung" die beiden Gleichungen

$$\dot{\mathfrak{r}} = \frac{i}{4\sigma}\,\mathfrak{z} \qquad (23_1)$$

und

$$\dot{\mathfrak{z}} = i(\mathfrak{z}-\mathfrak{r})\,, \qquad (23_2)$$

die gemäß (1) und (6_3) mit den Anfangsbedingungen

$$\mathfrak{z}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}(0) = \mathfrak{r}_0 = i\,\varepsilon_0 \qquad (23_3)$$

zu lösen sind.

Leitet man (23_2) nochmals nach τ ab und ersetzt $\dot{\mathfrak{r}}$ durch (23_1), so findet man

$$\ddot{\mathfrak{z}} - i\,\dot{\mathfrak{z}} - \frac{1}{4\sigma}\,\mathfrak{z} = 0\,, \qquad (23_4)$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für den Vektor $\mathfrak{z}$. Die Anfangsbedingungen sind

$$\mathfrak{z}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\mathfrak{z}}(0) = -i\,\mathfrak{r}_0 = \varepsilon_0\,. \qquad (23_5)$$

Leitet man (23_1) nach τ ab und ersetzt $\dot{\mathfrak{z}}$ und $\mathfrak{z}$ durch (23_2) und (23_1), so kommt für $\mathfrak{r}$ die Differentialgleichung

$$\ddot{\mathfrak{r}} - i\,\dot{\mathfrak{r}} - \frac{1}{4\sigma}\,\mathfrak{r} = 0\,, \qquad (23_6)$$

die mit Ausnahme der Anfangsbedingungen

$$\mathfrak{r}(0) = \mathfrak{r}_0 = i\,\varepsilon_0 \quad \text{und} \quad \dot{\mathfrak{r}}(0) = 0 \qquad (23_7)$$

völlig mit (23_4) übereinstimmt. Die Bewegung der Kreiselachse $\mathfrak{a}$ und der Schwungachse $\mathfrak{s}$ wird von übereinstimmenden Differentialgleichungen beherrscht, die sich jedoch in den Anfangsbedingungen unterscheiden.

Um die Lösung vom Anfangswert ε_0 unabhängig zu machen, setzt man zweckmäßig

$$\frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon_0} = \zeta \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{r}}{\varepsilon_0} = \varrho\,. \qquad (24_1)$$

Dann wird aus (23_1) und (23_2)

$$\dot{\varrho} = \frac{i}{4\sigma}\,\zeta \quad \text{und} \quad \dot{\zeta} = i(\zeta-\varrho) \qquad (24_2)$$

mit

$$\varrho(0) = i \quad \text{und} \quad \zeta(0) = 0\,; \qquad (24_3)$$

und aus (23_4) kommt

$$\ddot{\zeta} - i\,\dot{\zeta} - \frac{1}{4\sigma}\,\zeta = 0 \tag{24_4}$$

mit

$$\zeta(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \dot{\zeta}(0) = 1\,. \tag{24_5}$$

Der bekannte Ansatz

$$\zeta = e^{i\,\omega\,\tau}$$

liefert (wie früher) die beiden nur von der Stabilitätszahl σ abhängigen Frequenzen

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right), \qquad \omega_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right). \tag{25_1}$$

Die Lagevektoren ζ und ϱ in der waagerechten Ebene schwingen demnach mit zwei Frequenzen, die wir wieder als „schnelle" und „langsame" Frequenz der Bewegung bezeichnen. Ersichtlich ist nach (21_{11})

$$\omega_P = \omega_2\,, \tag{25_2}$$

so daß die langsame Frequenz ω_2 mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit ω_P des Schwungvektors übereinstimmt.

Die in der allgemeinen Lösung von (24_4)

$$\zeta = c_1\,e^{i\,\omega_1\,\tau} + c_2\,e^{i\,\omega_2\,\tau} \tag{26_1}$$

enthaltenen Konstanten c_1 und c_2 findet man aus den Anfangsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \zeta(0) &= c_1 + c_2 = 0\,, \\ \dot{\zeta}(0) &= (c_1\,\omega_1 + c_2\,\omega_2)\,i = 1 \end{aligned}\right\} \tag{26_2}$$

zu

$$c_1 = -\frac{i}{\omega_1 - \omega_2} \qquad \text{und} \qquad c_2 = +\frac{i}{\omega_1 - \omega_2}\,.$$

Damit wird

$$\zeta = -\frac{i}{\omega_1 - \omega_2}\,(e^{i\,\omega_1\,\tau} - e^{i\,\omega_2\,\tau}) \tag{26_3}$$

oder, indem man Real- und Imaginärteil trennt,

$$\left.\begin{aligned} \Re\mathrm{e}(\zeta) = \xi &= \frac{1}{\omega_1 - \omega_2}\,\left[+\sin(\omega_1\tau) - \sin(\omega_2\tau)\right], \\ \Im\mathrm{m}(\zeta) = \eta &= \frac{1}{\omega_1 - \omega_2}\,\left[-\cos(\omega_1\tau) + \cos(\omega_2\tau)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{26_4}$$

Das läßt sich mit (25_1) und (18_3) noch umgestalten zu

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 2\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\,\cos\frac{\tau}{2}\,\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\,\tau\right) = \beta\,\cos\frac{\tau}{2}\,, \\ \eta &= 2\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\,\sin\frac{\tau}{2}\,\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\,\tau\right) = \beta\,\sin\frac{\tau}{2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{26_5}$$

Setzt man

$$\zeta = |\zeta|\,e^{i\,\psi}\,, \tag{26_6}$$

so folgt aus (26_5)

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = |\zeta| = |\beta| \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\,. \tag{26_7}$$

Damit ist gezeigt, daß die durch (18_3) und (20_4) gegebene vereinfachte Lösung (β, ψ) mit der jetzt gefundenen völlig übereinstimmt.

Für sehr große Werte von σ gilt angenähert

$$\xi \approx 2\,\sin\frac{\tau}{2}\,\cos\frac{\tau}{2} = \sin\tau\,,$$

$$\eta \approx 2\,\sin^2\frac{\tau}{2} = 1 - \cos\tau\,.$$

Daraus folgt

$$\xi^2 + (\eta - 1)^2 \approx 1\,.$$

Das ist die Gleichung eines Kreises mit dem Halbmesser 1 und dem Mittelpunkt (0; 1). Die Achse $\mathfrak{a}$ eines sehr stark stabilisierten Kreisels beschreibt demnach (nahezu) einen Kreis um die (fast) raumfeste Schwungachse $\hat{\mathfrak{s}}$.

5. Die Bewegung der Schwungachse $\hat{\mathfrak{s}}$. Aus (22_1) und (24_1) folgt zunächst

$$s^2 = 1 + \varepsilon_0^2 \, |\varrho|^2 \tag{27_1}$$

und mit (11_3), (18_1), (18_3) und (19_3)

$$|\varrho|^2 = 1 + \frac{1}{4\,\sigma}\,\beta^2 = 1 + \frac{1}{\sigma - 1}\,\sin^2\left(\pi\,\frac{\tau}{\tau_N}\right). \tag{27_2}$$

Es gilt also

$$1 = |\varrho_0| \leqq |\varrho| \leqq |\varrho_1| = \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\,. \tag{27_3}$$

Der Neigungswinkel ε des bezogenen Schwunges $\hat{\mathfrak{s}}$ gegen die Richtung $\mathfrak{e}$ schwingt demnach mit der Schwingdauer τ_N zwischen dem kleinsten Wert ε_0 und dem größten Wert

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0\,|\varrho_1| = \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \frac{1}{2}\,\alpha_1 \tag{27_4}$$

hin und her. Die auf den mittleren Wert

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2}\,(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \quad \text{bzw.} \quad |\varrho_m| = \frac{1}{2}\,(1 + |\varrho_1|) \tag{27_5}$$

bezogene Schwankung von ε bzw. $|\varrho|$ wird

$$\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon_m} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_0} = \frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} + 1} = \left|\frac{\Delta\,\varrho}{\varrho_m}\right|, \tag{27_6}$$

also mit (27_4)

$$\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon_m} = \left|\frac{\Delta\,\varrho}{\varrho_m}\right| = \frac{\sqrt{\sigma} - \sqrt{\sigma-1}}{\sqrt{\sigma} + \sqrt{\sigma-1}} = \left(\sqrt{\sigma} - \sqrt{\sigma-1}\right)^2 \tag{27_7}$$

und mit (25_1)

$$\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon_m} = \left|\frac{\Delta\,\varrho}{\varrho_m}\right| = \frac{\omega_2}{\omega_1}\,. \tag{27_8}$$

Das Frequenzverhältnis ω_2/ω_1 ist gleich der bezogenen Schwankung des Neigungswinkels ε der Schwungachse $\hat{\mathfrak{s}}$.

Den Ausdruck $\Delta\,\varepsilon/\varepsilon_m$ wollen wir in die für ε geltende Beziehung (27_2) einführen. Aus

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 = |\varrho|^2 = 1 + \frac{1}{\sigma-1}\,\sin^2\left(\pi\,\frac{\tau}{\tau_N}\right)$$

wird zunächst

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 = \cos^2\left(\pi\,\frac{\tau}{\tau_N}\right) + \frac{\sigma}{\sigma-1}\,\sin^2\left(\pi\,\frac{\tau}{\tau_N}\right)$$

oder mit (27_4)

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(2\,\pi\,\frac{\tau}{\tau_N}\right)\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)^2\left[1 - \cos\left(2\,\pi\,\frac{\tau}{\tau_N}\right)\right].$$

Daraus folgt

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\,(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_0^2) - \frac{1}{2}\,(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2)\,\cos\left(2\,\pi\,\frac{\tau}{\tau_N}\right).$$

Setzt man hier

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_m - \Delta\,\varepsilon \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_m + \Delta\,\varepsilon$$

ein, so kommt

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m}\right)^2 = 1 - 2\,\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon_m}\,\cos\left(2\,\pi\,\frac{\tau}{\tau_N}\right) + \left(\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon_m}\right)^2 = \left[1 - \frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon_m}\,\cos\left(2\,\pi\,\frac{\tau}{\tau_N}\right)\right]^2 + \left[\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon_m}\,\sin\left(2\,\pi\,\frac{\tau}{\tau_N}\right)\right]^2,$$

oder für $\sigma \gtrsim 2$ bzw. $\dfrac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon_m} \lesssim \dfrac{1}{6}$ mit ausreichender Genauigkeit

$$\varepsilon \approx \varepsilon_m - \Delta\,\varepsilon\,\cos\left(2\,\pi\,\frac{\tau}{\tau_N}\right). \tag{27_9}$$

Während sich der bezogene Schwung $\mathfrak{s}$ mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit ω_P um die Richtung $\mathfrak{e}$ dreht, schwingt der Neigungswinkel ε von $\mathfrak{s}$ mit der Schwingdauer τ_N um den mittleren Wert ε_m.

Betrachten wir noch die Bewegung in der waagerechten Ebene. Aus (21_3) erhält man mit (24_1) und (18_1) als Betrag von $\dot{\zeta}$

$$|\dot{\zeta}| = |\dot{\beta} + i\beta\dot{\psi}|$$

oder

$$|\dot{\zeta}|^2 = \dot{\beta}^2 + (\beta\dot{\psi})^2 .$$

Mit (18_2) und (20_4) wird daraus

$$|\dot{\zeta}|^2 = 1 + \frac{1}{4\sigma}\beta^2 . \tag{28_1}$$

Nach (27_2) und (28_1) ist nun

$$|\varrho| = |\dot{\zeta}| . \tag{28_2}$$

Weiter folgt aus (24_2)

$$|\dot{\varrho}| = \frac{1}{4\sigma}|\zeta| , \quad |\dot{\zeta}| = |\zeta - \varrho| \tag{28_3}$$

und

$$\dot{\varrho} \perp \zeta , \quad \dot{\zeta} \perp \zeta - \varrho . \tag{28_4}$$

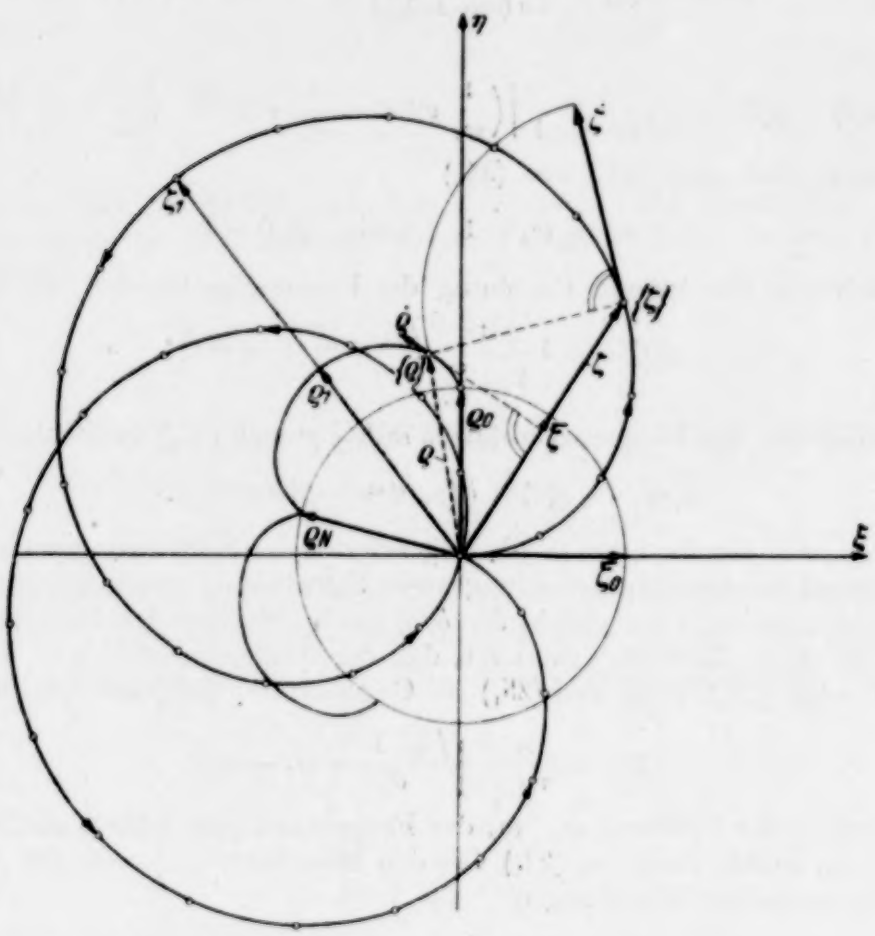

Abb. 7. Der Zusammenhang zwischen den Bahnkurven des „Kreiselvektors" $\zeta(\tau)$ und des Schwungvektors $\varrho(\tau)$ in der waagerechten Ebene. Die Bahnkurve $\zeta(\tau)$ ist mit „Zeitmarken" versehen.

Diese Beziehungen sind in Abb. 7 dargestellt. Wir bezeichnen mit $\{\varrho\}$ und $\{\zeta\}$ die Endpunkte der Vektoren ϱ und ζ. Dann hat $\{\varrho\}$ vom Anfangs- und Endpunkt des Vektors ζ den gleichen Abstand

$$|\varrho| = |\zeta - \varrho| . \tag{28_5}$$

Da $\dot{\varrho} \perp \zeta$ steht, so bewegt sich $\{\varrho\}$ stets in Richtung des Mittellotes von ζ, und zwar mit der Bahngeschwindigkeit $|\dot{\varrho}|$, die zum Betrag $|\zeta|$ verhältnisgleich ist. Die Bahn des Punktes $\{\varrho\}$ ist die Einhüllende der Mittellote von ζ. Dreht man die Kurve $\zeta(\tau)$ um $\pi/2$ und verkleinert alle Längen im Verhältnis $1:4\sigma$, so findet man den Geschwindigkeitsplan (Hodographen) für die

Bewegung von $\{\varrho\}$. Da weiterhin $\dot{\zeta}$ senkrecht auf $\zeta-\varrho$ steht, so bewegt sich $\{\zeta\}$ in jedem Augenblick längs eines Kreises um $\{\varrho\}$ mit der Bahngeschwindigkeit $|\dot{\zeta}|$, die dem jeweiligen Halbmesser $|\zeta-\varrho|$ des „Kreises" gleich ist. Die Bewegung der Achsen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{a}$ ist damit geometrisch einfach veranschaulicht.

Analytisch ist $\zeta(\tau)$ durch (26_3) bzw. (26_5) gegeben. Für die Beträge $|\dot{\varrho}|$ und $|\dot{\zeta}|$ der Bahngeschwindigkeiten von $\{\varrho\}$ und $\{\zeta\}$ gilt nach (28_3), (26_7) und (18_3)

$$|\dot{\varrho}(\tau)| = \frac{1}{4\sigma}|\beta| = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sigma(\sigma-1)}}\left|\sin\left(\pi\frac{\tau}{\tau_N}\right)\right|, \tag{29$_1$}$$

und nach (28_2) und (27_2)

$$|\dot{\zeta}(\tau)|^2 = 1 + \frac{1}{\sigma-1}\sin^2\left(\pi\frac{\tau}{\tau_N}\right). \tag{29$_2$}$$

Für $\varrho(\tau)$ kommt aus (24_2)

$$\varrho(\tau) = \varrho(0) + \frac{i}{4\sigma}\int_0^\tau \zeta(\tau)\,d\tau$$

und mit (26_3)

$$\varrho(\tau) = \varrho(0) + \frac{1}{4\sigma(\omega_1-\omega_2)}\int_0^\tau (e^{i\omega_1\tau} - e^{i\omega_2\tau})\,d\tau\,.$$

Integration liefert

$$\varrho(\tau) = \varrho(0) - \frac{i}{4\sigma(\omega_1-\omega_2)}\left[\left(\frac{1}{\omega_1}e^{i\omega_1\tau} - \frac{1}{\omega_2}e^{i\omega_2\tau}\right) - \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}\right)\right].$$

Berücksichtigt man, daß nach (25_1) und (24_3)

$$4\sigma\omega_1\omega_2 = 1 \quad \text{und} \quad \varrho(0) = i \tag{29$_3$}$$

ist, so verschwinden in der letzten Gleichung die konstanten Glieder. Es bleibt wegen (29_3)

$$\varrho(\tau) = -i\frac{1}{1-\frac{\omega_2}{\omega_1}}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}e^{i\omega_1\tau} - e^{i\omega_2\tau}\right).$$

Ersetzt man schließlich das Frequenzverhältnis ω_2/ω_1 gemäß (27_8) durch $\Delta\varepsilon/\varepsilon_m$, so findet man

$$\mathfrak{r}(\tau) = \varepsilon_0\,\varrho(\tau) = i\,(\varepsilon_m e^{i\omega_2\tau} - \Delta\varepsilon\, e^{i\omega_1\tau})\,. \tag{29$_4$}$$

Der Vektor $\varepsilon_0\varrho$ entsteht demnach durch Überlagerung zweier Schwingungen mit den Frequenzen ω_1 und ω_2. Während die Amplitude der langsamen Schwingung gleich dem mittleren Neigungswinkel ε_m der Schwungachse $\mathfrak{z}$ ist, gleicht die Amplitude der schnellen Schwingung der Schwankung $\Delta\varepsilon$ dieses Winkels. Bemerkenswert ist, daß der Neigungswinkel ε, d. h. der Betrag $\varepsilon_0|\varrho|$ des Vektors $\varepsilon_0\varrho$, nach (27_9), (19_2) und (25_1) im Gegensatz zu (29_4) nur mit der Frequenz

$$\omega_N = \frac{2\pi}{\tau_N} = \sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = \omega_1 - \omega_2 \tag{29$_5$}$$

schwingt. Wir wollen die Differenz $\omega_1-\omega_2$ der Frequenzen (wie früher) als Nutationsfrequenz bezeichnen. Mit ω_N erhält man aus (27_5) für den Mittelwert $|\varrho_m|$ und die Schwankung $|\Delta\varrho|$ des Vektors ϱ die einfachen Beziehungen

$$|\varrho_m| = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} = \frac{\omega_1}{\omega_N} \quad \text{und} \quad |\Delta\varrho| = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\omega_2}{\omega_N}. \tag{29$_6$}$$

6. Die „mittlere Bewegung" der Kreiselachse $\mathfrak{a}$ bzw. der waagerechten Vektoren $\mathfrak{z}$ und ζ. Der mittlere Wert ζ_M von ζ während einer Nutationsperiode τ_N wird

$$\zeta_M = \frac{1}{\tau_N}\int_0^{\tau_N}\zeta\,d\tau$$

oder mit (24_2)

$$\zeta_M = -\frac{4\sigma i}{\tau_N}\int_0^{\tau_N}\dot{\varrho}\,d\tau = -\frac{4\sigma i}{\tau_N}\left[\varrho(\tau_N) - \varrho(0)\right]. \tag{30$_1$}$$

Nun ist nach (29_4) oder Abb. 7

$$\varrho(\tau_N) = \varrho_N = i\, e^{i\,\omega_2\,\tau_N} \quad \text{und} \quad \varrho(0) = \varrho_0 = i\,.$$

Also wird

$$\zeta_M = \frac{4\,\sigma}{\tau_N}\left(e^{i\,\omega_2\,\tau_N} - 1\right). \tag{30_2}$$

Der Realteil ist

$$\Re\mathrm{e}(\zeta_M) = \frac{4\,\sigma}{\tau_N}\left[\cos\left(\omega_2\tau_N\right) - 1\right]$$

und der Imaginärteil

$$\Im\mathrm{m}(\zeta_M) = \frac{4\,\sigma}{\tau_N}\sin\left(\omega_2\,\tau_N\right).$$

Für den Winkel φ_M, den ζ_M mit der Y-Achse bildet, gilt demnach

$$\operatorname{tg}\varphi_M = \frac{1-\cos\left(\omega_2\,\tau_N\right)}{\sin\left(\omega_2\,\tau_N\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\,\omega_2\,\tau_N\right),$$

also

$$\varphi_M = \frac{1}{2}\,\omega_2\,\tau_N\,. \tag{30_3}$$

Weiter ist der Betrag

$$|\zeta_M|^2 = \left(\frac{4\,\sigma}{\tau_N}\right)^2 2\left[1-\cos\left(\omega_2\tau_N\right)\right]$$

oder

$$|\zeta_M| = \frac{8\,\sigma}{\tau_N}\sin\varphi_M\,. \tag{30_4}$$

Der Vektor ζ_M hat die gleiche Richtung wie $\varrho(\tau_N/2) = \varrho_1$. Der Betrag $|\zeta_M|$ hat die Größenordnung 1. Das ist für große Stabilitätszahlen leicht nachzuweisen. In dem Falle ist nämlich nach (21_{11}) und (19_2)

$$\omega_2 \approx \frac{1}{4\,\sigma} \quad \text{und} \quad \tau_N \approx 2\pi\left(1+\frac{1}{2\,\sigma}\right) \approx 2\pi\,,$$

also

$$\varphi_M \approx \frac{\pi}{4\,\sigma}$$

und mit $\sin\varphi_M \approx \varphi_M$

$$|\zeta_M| \approx \frac{8\,\sigma}{\tau_N}\,\frac{1}{2}\,\omega_2\,\tau_N = 4\,\sigma\,\omega_2 \approx 1\,.$$

Die genauen Beträge von $|\zeta_M|$ sind aus Abb. 4 in Abhängigkeit von σ ersichtlich. Danach darf man ohne einen ins Gewicht fallenden Fehler im allgemeinen $|\zeta_M|$ durch $|\varrho_m|$ ersetzen.

Der Mittelwert der Geschwindigkeit $\dot{\varrho}$ während einer Nutationsperiode τ_N ist

$$\dot{\varrho}_M = \frac{1}{\tau_N}\int_0^{\tau_N}\dot{\varrho}\,d\tau = \frac{1}{\tau_N}\,\left(\varrho_N - \varrho_0\right),$$

also nach (30_1)

$$\dot{\varrho}_M = \frac{i}{4\,\sigma}\,\zeta_M\,. \tag{30_5}$$

Die mittlere Geschwindigkeit $\dot{\varrho}_M$ der „Schwungachse" steht demnach senkrecht auf dem mittleren Ortsvektor ζ_M der „Kreiselachse". Ist der Kreisel sehr kräftig stabilisiert, so genügt es bei manchen Betrachtungen, die tatsächliche Bewegung $\zeta(\tau)$ der Achse $\mathfrak{a}$ des Kreisels durch die „mittlere Bewegung" ζ_M zu ersetzen. Der Mittelwert ζ_M dreht sich mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit $\omega_2 = \omega_P$ wie die Schwungachse um die Richtung $\mathfrak{e}$.

7. Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit betrachten wir einen stabilen, schweren symmetrischen Kreisel, dessen Achse $\mathfrak{a}$ anfangs senkrecht steht $[\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{e}]$, wenn sein Längsschwung $\mathfrak{S}_A(0)$ durch einen „kleinen" Querschwung $\mathfrak{S}_B(0)$ „gestört" wird. Nach Einführung von dimensionslosen Veränderlichen, des auf den Anfangsbetrag $S_A(0)$ bezogenen Schwunges $\hat{s}$ und der „dimensionslosen Zeit" τ, zeigt sich, daß der Vorgang nur noch von einem einzigen Parameter, der Stabilitätszahl σ des Kreisels, abhängt. Insbesondere wird der Ablauf der Bewegung un-

abhängig vom Betrage der Anfangsstörung ε_0, jedoch sind die Längenabmessungen aller von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{s}$ beschriebenen Bahnkurven zu ε_0 verhältnisgleich.

Die Kreiselachse $\mathfrak{a}$ dreht sich gleichförmig mit der von ε_0 und σ unabhängigen Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}=\frac{1}{2}$ um die raumfeste Richtung $\mathfrak{e}$, wenn $\varepsilon_0 \lessapprox 0{,}1$ und $\sigma \gtrapprox 1{,}5$ ist. Dabei schwingt ihr Neigungswinkel α mit der Periode τ_N (bzw. der Nutationsfrequenz ω_N) zwischen dem Anfangswert $\alpha_0=0$ und dem größten Wert α_1 hin und her. Die Schwungachse $\mathfrak{s}$ dreht sich mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit $\omega_2=\omega_P$ um die feste Richtung $\mathfrak{e}$, wobei ihr Neigungswinkel ε mit der Frequenz ω_N um den mittleren Wert $\varepsilon_m=\varepsilon_0+\Delta\varepsilon=\varepsilon_1-\Delta\varepsilon$ schwingt. Mit wachsender Stabilitätszahl strebt α_1 gegen $2\varepsilon_0$ und $\Delta\varepsilon$ gegen 0, während $\omega_N \approx 1$ und $\omega_P \approx \frac{1}{4\sigma}$ wird.

Ordnet man den Achsen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{s}$ in der Horizontalebene die Vektoren $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{r}$ bzw. $\zeta=\mathfrak{z}/\varepsilon_0$ und $\varrho=\mathfrak{r}/\varepsilon_0$ zu, dann zeigt sich, daß die Bewegung dieser Vektoren von derselben Differentialgleichung geregelt wird, jedoch sind die Anfangsbedingungen unterschiedlich. Man findet, daß die Bewegung zwei Frequenzen, eine „schnelle" ω_1 und eine „langsame" ω_2, enthält, wobei die schnelle Frequenz ω_1 gleich der Summe $(\omega_N+\omega_P)$ aus der Nutationsfrequenz ω_N und der Präzessionsfrequenz ω_P (d. h. der Umlaufgeschwindigkeit der Schwungachse $\mathfrak{s}$) ist. Besonders anschaulich ist die geometrische Deutung der Horizontalbewegung. Der Endpunkt $\{\zeta\}$ von ζ bewegt sich in jedem Zeitpunkt längs eines „Kreises" um $\{\varrho\}$, den Endpunkt von ϱ. Die Bahngeschwindigkeit $|\dot{\zeta}|$ dieser „Drehung" ist gleich dem Halbmesser $|\zeta-\varrho|$ des „Kreises". Der Endpunkt $\{\varrho\}$ von ϱ bewegt sich ständig auf dem Mittellot von ζ mit der Bahngeschwindigkeit $|\dot{\varrho}|$, welche zu $|\zeta|$ verhältnisgleich ist.

Für sehr große Stabilitätszahlen darf man zuweilen von der Nutationsbewegung absehen. Man ersetzt dann die verwickelte Bewegung $\zeta(\tau)$ durch eine fiktive mittlere Bewegung $\zeta_M(\tau)$, wobei ζ_M der jeweils über eine Nutationsperiode τ_N genommene Mittelwert von ζ ist. Für die erste Periode hat ζ_M die Richtung von $\varrho(\tau_N/2)$ und nahezu den Betrag $|\varrho_m|$. Der Punkt $\zeta_M(\tau)$ bewegt sich praktisch mit der mittleren Schwungachse ϱ_m auf einem Kreise um die raumfeste Richtung $\mathfrak{e}$.

(Eingegangen am 1. August 1947.)

Die elastisch-plastische Biegung des krummen Stabes*.

Von **W. Swida** in Karlsruhe.

1. Einleitung. Die Bestimmung der Spannungen und Formänderungen in geraden Balken beim elastisch-plastischen Zustand, sowie das Traglastverfahren zur Berechnung statisch unbestimmter Balken, Rahmen und Fachwerke erschienen als Gegenstand einer Reihe von Veröffentlichungen im Laufe der letzten zwei Jahrzehnte.

Die Untersuchung des Spannungszustandes des gekrümmten Stabes bei elastisch-plastischer Biegung wurde noch nicht in der Fachliteratur erörtert. Die vorliegende Arbeit ist der Behandfung dieser Aufgabe gewidmet.

2. Exakte Theorie. a) Allgemeines. Zunächst betrachten wir eine strenge Lösung der Aufgabe; eine Lösung, welche nicht nur die längs der Stabachse wirkenden Zug- und Druckspannungen ermittelt, sondern auch die Kräfte der seitlichen Pressung zwischen den Längslasern berücksichtigt.

Wir betrachten einen schmalen, gekrümmten Stab mit kreisförmiger Achse und konstantem rechteckigem Querschnitt, der die Breite 1 hat (Abb. 1). Der Stab wird durch die Momente M, die in der Längssymmetrieebene wirken, beansprucht.

In einem krummen Stab mit rechteckigem Querschnitt entstehen bei der Biegung die maximalen Spannungen in den Fasern der konkaven Oberfläche. Deshalb wollen wir voraussetzen, daß die Plastizierung zunächst in den Fasern auftritt, die in der Nähe dieser Fläche liegen. Im Falle einer Zunahme der Momente können plastische Formänderungen auch auf der anderen Seite von der neutralen Fläche entstehen.

Deshalb unterscheiden wir zwei Spannungszustände:

1. Die plastische Zone ist nur an der konkaven Oberfläche entstanden,
2. die plastische Zone tritt sowohl an der konkaven als auch an der konvexen Oberfläche auf.

b) Erster Spannungszustand. Man bezeichnet mit a und b den inneren bzw. den äußeren Radius des krummen Stabes und mit ϱ den Radius der Grenzfläche zwischen dem elastischen und dem plastischen Bereich (Abb. 1). Man betrachtet ein kleines, aus dem plastischen Bereich herausgeschnittenes Element $mnpq$ (Abb. 2) und bezeichnet die tangentiale Normalspannung mit σ_t und die radiale Normalspannung mit σ_r.

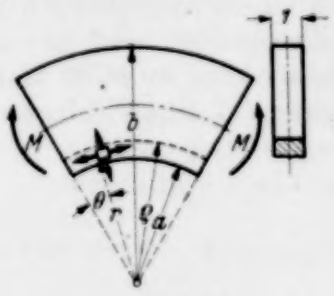

Abb. 1.

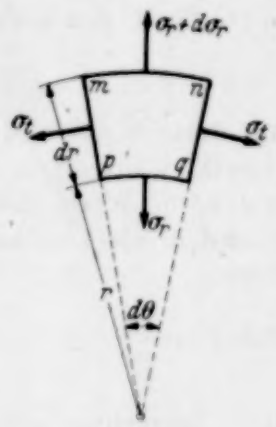

Abb. 2.

Infolge der Unveränderlichkeit des Biegungsmomentes entstehen auf den Oberflächen dieses Elementes keine Schubspannungen. Aus demselben Grunde hängen σ_t und σ_r nicht vom Winkel ϑ ab und erscheinen ausschließlich als Funktionen vom Radius r, sowohl in dem plastischen als auch in dem elastischen Bereich.

Bildet man die Summe der Projektionen aller auf das Element $mnpq$ wirkenden Kräfte auf die Mittellinie des Winkels $\mathrm{d}\vartheta$, so erhält man folgende Gleichgewichtsgleichung:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_t - \sigma_r\,. \tag{1}$$

Fügt man zu der erhaltenen Gleichung noch die Plastizitätsbedingung hinzu, so wird der Spannungszustand in dem plastischen Bereich vollständig bestimmt.

Laut Annahme von *Mises-Hencky* müssen die Hauptspannungen im Material, das sich im Fließzustand befindet, im Falle des ebenen Spannungszustandes folgende Plastizitätsbedingung[1] erfüllen:

$$\sigma_t^2 + \sigma_r^2 - \sigma_t\sigma_r = \sigma_s^2\,, \tag{2}$$

wobei σ_s die Fließgrenze ist.

---

* Nach einem Vortrag auf der Mathematiker-Tagung in Karlsruhe, Ostern 1947. Mitteilung 2 (Mitteilung 1 siehe Ing.-Arch. 16 (1948), S. 221).

[1] Siehe z. B. *A. Nádai*, Der bildsame Zustand der Werkstoffe, S. 133. Berlin 1927.

Ermittelt man σ_t aus (2) und setzt man den gefundenen Wert in die Gleichung (1) ein, so erhält man die Differentialgleichung

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} = \mp\sqrt{\sigma_s^2 - \frac{3}{4}\sigma_r^2} - \frac{\sigma_r}{2},$$

deren allgemeine Lösung ist

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}\,\sigma_r}{2\,\sigma_s} + \frac{1}{4}\left(\ln\frac{3\sigma_r + 2\sigma_s + \sqrt{4\sigma_s^2 - 3\sigma_r^2}}{3\sigma_r + 6\sigma_s + 3\sqrt{4\sigma_s^2 - 3\sigma_r^2}} - \right.$$
$$\left. - \ln\frac{3\sigma_r - 2\sigma_s - \sqrt{4\sigma_s^2 - 3\sigma_r^2}}{3\sigma_r - 6\sigma_s - 3\sqrt{4\sigma_s^2 - 3\sigma_r^2}} \pm \ln(\sigma_s^2 - \sigma_r^2)\right) = \mp\ln r + C.$$

Man ersieht, daß die Anwendung der Plastizitätsbedingung (2) zu einer sehr komplizierten Gleichung für die Bestimmung der Unbekannten σ_r und σ_t geführt hat.

Eine wesentliche Vereinfachung kann durch die Anwendung der Plastizitätsbedingung in der von *Mohr* vorgeschlagenen Form erreicht werden. Nach der Plastizitätsbedingung von *Mohr* wird der Fließzustand im Material dann erreicht, wenn die Differenz zwischen der maximalen und der minimalen Hauptspannung der Fließgrenze beim reinen Zug gleich wird. Die auf Grund der beiden oben angeführten Plastizitätsannahmen erhaltenen Ergebnisse unterscheiden sich gewöhnlich wenig voneinander.

Bei dem in Abb. 1 gezeigten Richtungssinne der Momente sind σ_t und σ_r Zugspannungen. Die dritte, zur Bildfläche senkrecht wirkende Hauptspannung ist gleich Null. Daher erhält die *Mohr*sche Plastizitätsbedingung folgende Form:

$$\sigma_t = \sigma_s. \tag{3}$$

Ersetzt man in (1) σ_t durch σ_s, so erhält man die Differentialgleichung

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_s - \sigma_r,$$

deren allgemeine Lösung lautet

$$C\,r\,(\sigma_s - \sigma_r) = 1. \tag{4}$$

Wenn $r = a$ ist, so muß $\sigma_r = 0$ sein. Dann ist die unbestimmte Konstante $C = 1/a\sigma_s$. Setzt man in (4) für C den gefundenen Wert ein, so erhält man

$$\sigma_r = \sigma_s\left(1 - \frac{a}{r}\right). \tag{5}$$

Auf diese Weise ändert sich in dem unteren plastischen Bereich σ_r nach einem hyperbolischen Gesetz, während σ_t konstant bleibt. Die Gleichungen der Hyperbelasymptoten sind $\sigma_r = \sigma_s$ und $r = 0$. Wenn die Biegungsmomente in entgegengesetzter Richtung wirken, so muß man σ_t und σ_r als Druckspannungen betrachten, und die Plastizitätsbedingung (3) erhält folgende Form:

$$\sigma_t = -\sigma_s.$$

Dabei ist

$$\sigma_r = -\sigma_s\left(1 - \frac{a}{r}\right).$$

Jetzt betrachten wir den elastischen Bereich.

Die Differentialgleichung für die *Airy*sche Spannungsfunktion in Polarkoordinaten nimmt für den Fall, daß die Spannungen nur vom Radius r abhängen, folgende Form an[1]:

$$\frac{d^4\varphi}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\varphi}{dr} = 0,$$

wobei φ die Spannungsfunktion ist. Das allgemeine Integral dieser Gleichung wird

$$\varphi = A\ln r + Br^2\ln r + Cr^2 + D. \tag{6}$$

Die senkrecht zur Oberfläche angreifenden Spannungen σ_t und σ_r sind für ein aus dem elastischen Bereich herausgeschnittenes Element $mnpq$ (Abb. 2)

$$\sigma_t = \frac{d^2\varphi}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2\ln r) + C, \tag{7}$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2\ln r) + 2C. \tag{8}$$

---

[1] Siehe z. B. *S. Timoshenko*, Theory of Elasticity, S. 55, New York und London 1934, oder *A. Föppl* und *L. Föppl*, Drang und Zwang, 1. Bd., S. 303, München 1924.

Zur Ermittlung der unbestimmten Konstanten A, B und C können wir folgende drei Gleichungen anschreiben:

$$-\frac{A}{\varrho^2}+B\,(3+2\ln\varrho)+2\,C=\sigma_s\,, \tag{9}$$

$$\frac{A}{\varrho^2}+B\,(1+2\ln\varrho)+2\,C=\sigma_s\left(1-\frac{a}{\varrho}\right), \tag{10}$$

$$\frac{A}{b^2}+B\,(1+2\ln b)+2\,C=0\,. \tag{11}$$

Die ersten zwei Gleichungen zeigen, daß, wenn $r=\varrho$ ist, d.h. an der Grenze zwischen der elastischen und der plastischen Zone, die tangentialen und radialen Spannungen der elastischen Zone den entsprechenden Spannungen der plastischen Zone gleich sein müssen. Die dritte Bedingung bedeutet, daß, wenn $r=b$ ist, d. h. an der konvexen Fläche, $\sigma_r=0$ ist. Aus den Gleichungen (9), (10) und (11) ergibt sich

$$A=\frac{\sigma_s\,\varrho\,b^2}{N}\left[\varrho-a\left(1-\ln\frac{b}{\varrho}\right)\right],$$

$$B=\frac{\sigma_s}{2\,\varrho\,N}\left[b^2\,(2\,\varrho-a)-a\varrho^2\right],$$

$$C=\frac{\sigma_s}{4\,\varrho\,N}\left[\varrho^2\,(3\,a-2\,\varrho+2\,a\ln\varrho)+b^2\,(a-2\,\varrho)\,(1+2\ln b)\right],$$

worin

$$N=b^2-\varrho^2-2\,b^2\ln\frac{b}{\varrho}$$

ist.

Setzt man die gefundenen Werte von A, B und C in (7) und (8) ein, so erhält man die endgültigen Formeln für die Spannungen σ_t und σ_r für den ersten Spannungszustand

$$\sigma_t=\frac{\sigma_s}{N\varrho r^2}\left\{b^2\,r^2\left[(2\,\varrho-a)\left(1-\ln\frac{b}{r}\right)\right]+\varrho^2\left[a\left(r^2\ln\frac{\varrho}{r}-b^2\ln\frac{b}{\varrho}\right)+b^2\,(a-\varrho)-\varrho r^2\right]\right\}, \tag{12}$$

$$\sigma_r=\frac{\sigma_s}{N\varrho r^2}\left\{b^2\,r^2\ln\frac{b}{r}\,(a-2\,\varrho)+\varrho^2\left[a\left(r^2\ln\frac{\varrho}{r}+b^2\ln\frac{b}{\varrho}\right)+(\varrho-a)\,(b^2-r^2)\right]\right\}. \tag{13}$$

In diesen Formeln ist der Wert von ϱ noch unbekannt.

Zu seiner Ermittlung untersuchen wir die Gleichgewichtsbedingungen eines Stabteiles (Abb. 3). Man ersieht, daß

1. die tangentialen Normalspannungen σ_t in einem beliebigen Querschnitt ein Kräftepaar bilden, und daß
2. das Moment dieses Kräftepaares dem Moment der äußeren Kräfte größenmäßig gleich, aber dem Richtungssinne nach entgegengesetzt ist.

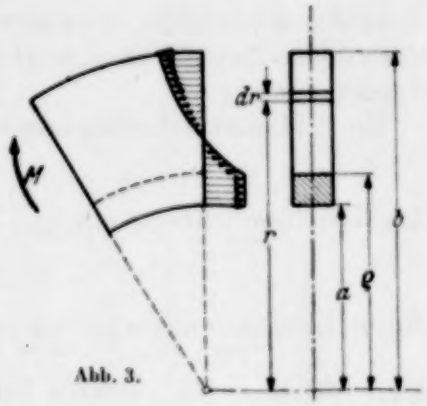

Abb. 3.

Die erste Bedingung läßt sich so darstellen:

$$\int_{\varrho}^{b}\sigma_t\,dr+\sigma_s\,(\varrho-a)=\int_{\varrho}^{b}\frac{d^2\varphi}{dr^2}\,dr+\sigma_s\,(\varrho-a)=\left[\frac{d\varphi}{dr}\right]_{\varrho}^{b}+\sigma_s\,(\varrho-a)$$

$$=\left[\frac{A}{b}+B\,(b+2\,b\ln b)+2\,Cb\right]-\left[\frac{A}{\varrho}+B\,(\varrho+2\,\varrho\ln\varrho)+2\,C\varrho\right]+\sigma_s\,(\varrho-a)=0\,.$$

Der Ausdruck, der in der ersten eckigen Klammer steht, ist auf Grund von (11) gleich Null, und der in der zweiten eckigen Klammer stehende Ausdruck ist auf Grund von (10) gleich $\sigma_s\,(\varrho-a)$. Auf diese Weise geht die letzte Gleichung in die Identität $0=0$ über. Man kann die zweite Bedingung folgendermaßen darstellen:

$$\left.\begin{aligned}-M&=\int_{\varrho}^{b}\sigma_t\,r\,dr+\frac{\sigma_s}{2}\,(\varrho^2-a^2)=\int_{\varrho}^{b}\frac{d^2\varphi}{dr^2}\,r\,dr+\frac{\sigma_s}{2}\,(\varrho^2-a^2)=\left[r\,\frac{d\varphi}{dr}\right]_{\varrho}^{b}-\left[\varphi\right]_{\varrho}^{b}+\\+\frac{\sigma_s}{2}\,(\varrho^2-a^2)&=\left[A+B\,(b^2+2\,b^2\ln b)+2\,Cb^2\right]-\left[A+B\,(\varrho^2+2\,\varrho^2\ln\varrho)+2\,C\,\varrho^2\right]-\\&-\left[A\ln\frac{b}{\varrho}+B\,(b^2\ln b-\varrho^2\ln\varrho)+C\,(b^2-\varrho^2)\right]+\frac{\sigma_s}{2}\,(\varrho^2-a^2)\,.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Unter Berücksichtigung, daß der in der ersten eckigen Klammer stehende Ausdruck auf Grund von (11) gleich Null ist, und daß der in der zweiten eckigen Klammer stehende Ausdruck auf Grund von (10) gleich $\sigma_s\,\varrho\,(\varrho-a)$ ist, ergibt sich nach Einsetzen der Werte A, B und C folgende Gleichung zur Bestimmung von ϱ:

$$a\,(b^4+\varrho^4)+2\,\varrho\left[\gamma\,(b^2-\varrho^2)-a b^2\,\varrho\right]+4\,\varrho\,b^2\ln\frac{b}{\varrho}\left[\beta+\varrho\left(\varrho+a\ln\frac{b}{\varrho}\right)\right]=0\,, \tag{15}$$

wobei

$$\beta=\frac{2\,M}{\sigma_s}-a^2\,,\quad \gamma=a^2-b^2-\frac{2\,M}{\sigma_s}$$

ist.

Nach Ermittlung von ϱ aus (15) kann man dann mit Hilfe von (12) und (13) die Spannungen in einem beliebigen Punkt finden.

Setzt man den Ausdruck $d\sigma_r/dr$ gleich Null und löst die erhaltene Gleichung nach r auf, so ergibt sich

$$r=\sqrt{\frac{2\,\varrho^2 b^2\left[a\left(\ln\frac{b}{\varrho}-1\right)+\varrho\right]}{b^2(2\,\varrho-a)-a\,\varrho^2}} \tag{16}$$

Bei diesem Wert von r hat σ_r die maximale Größe. Beim Einsetzen des Wertes r aus (16) in (13) ergibt sich $\sigma_{r\,(\max)}$. Für $r=b$ (13) ist $\sigma_r=0$.

Setzt man den Ausdruck für σ_t gleich Null, so ergibt sich die Gleichung

$$b^2 r^2\left[(2\,\varrho-a)\left(1-\ln\frac{b}{r}\right)\right]+\varrho^2\left[a\left(r^2\ln\frac{\varrho}{r}-b^2\ln\frac{b}{\varrho}\right)+b^2(a-\varrho)-\varrho\,r^2\right]=0\,,$$

aus der man die Lage der neutralen Achse bestimmen kann.

Setzt man in (15) $\varrho=a$ und für β und γ ihre Werte ein, so erhält man nach Auflösen der Gleichung nach M denjenigen Wert des Biegungsmomentes, der dem Anfang des Fließvorganges in den unteren Querschnittsfasern entspricht,

$$M=\frac{\sigma_s\left[(b^2-a^2)^2-4\,a^2 b^2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2\right]}{4\left(a^2-b^2+2\,b^2\ln\frac{b}{a}\right)}\,. \tag{17}$$

c) Zweiter Spannungszustand. Das Gesetz der Spannungsverteilung in der unteren plastischen Zone bleibt das gleiche. In der oberen plastischen Zone ist σ_r eine Zug- und σ_t eine Druckspannung.

Die Plastizitätsbedingung nach *Mohr* lautet

$$\sigma_r-\sigma_t=\sigma_s\,. \tag{18}$$

Die Gleichgewichtsgleichung (1) eines Elementes der oberen plastischen Zone wird

$$r\,\frac{d\sigma_r}{dr}=\sigma_t-\sigma_r=-\sigma_s\,. \tag{19}$$

Durch Integration erhält man

$$\sigma_r=C-\sigma_s\ln r\,. \tag{20}$$

Bei $r=b$ ist $\sigma_r=0$. Daraus folgt:

$$C=\sigma_s\ln b\,.$$

Wenn man in (20) für C dessen Wert einsetzt, so ergibt sich

$$\sigma_r=\sigma_s\ln\frac{b}{r}\,. \tag{21}$$

Dann erhält man auf Grund von (18)

$$\sigma_t=-\sigma_s\left(1-\ln\frac{b}{r}\right). \tag{22}$$

Auf diese Weise ändern sich in der oberen plastischen Zone die beiden Spannungen nach einem logarithmischen Gesetz.

Wenn die angreifenden Momente in entgegengesetztem Sinne wirken, so erhalten die Gleichungen (18) und (19) folgende Form:

$$\sigma_t-\sigma_r=\sigma_s\,,\quad r\,\frac{d\sigma_r}{dr}=\sigma_s\,.$$

Daraus folgt

$$\sigma_r=-\sigma_s\ln\frac{b}{r}\,,$$

$$\sigma_t=\sigma_s\left(1-\ln\frac{b}{r}\right).$$

Die Spannungen in der elastischen Zone bestimmen sich nach den Formeln (7) und (8).

Die Bedingungen des stetigen Überganges an den Grenzen zwischen der elastischen und der plastischen Zone können folgendermaßen dargestellt werden (Abb. 4):

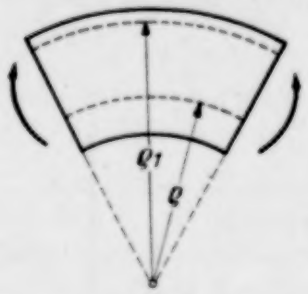

Abb. 4.

$$-\frac{A}{\varrho^2}+B\,(3+2\ln\varrho)+2\,C=\sigma_s\,, \tag{23}$$

$$\frac{A}{\varrho^2}+B\,(1+2\ln\varrho)+2\,C=\sigma_s\left(1-\frac{a}{\varrho}\right), \tag{24}$$

$$\frac{A}{\varrho_1^{\,2}}+B\,(1+2\ln\varrho_1)+2\,C=\sigma_s\ln\frac{b}{\varrho_1}\,, \tag{25}$$

$$-\frac{A}{\varrho_1^{\,2}}+B\,(3+2\ln\varrho_1)+2\,C=-\sigma_s\left(1-\ln\frac{b}{\varrho_1}\right). \tag{26}$$

Die Gleichungen (23) und (24) entsprechen den Bedingungen (9) und (10) des ersten Spannungszustandes. Die Gleichungen (25) und (26) zeigen, daß, wenn $r=\varrho_1$ ist, d. h. an der Grenze zwischen der elastischen und der oberen plastischen Zone, die radialen und tangentialen Spannungen der elastischen Zone den entsprechenden Spannungen der plastischen Zone gleich sein müssen. Aus (23), (24) und (25) folgt

$$A=\frac{\sigma_s\,\varrho\,\varrho_1^{\,2}}{N_1}\left[\varrho\left(\ln\frac{b}{\varrho_1}-1\right)+a\left(1-\ln\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)\right],$$

$$B=\frac{\sigma_s}{2\,\varrho\,N_1}\left[2\,\varrho\,\varrho_1^2\left(\ln\frac{b}{\varrho_1}-1\right)+a\,(\varrho_1^2+\varrho^2)\right],$$

$$C=\frac{\sigma_s}{4\,\varrho\,N_1}\left[2\,\varrho^2\left(\varrho-a\ln\varrho-\frac{3}{2}a\right)+2\,\varrho\,\varrho_1^2\left(1+2\ln\frac{\varrho_1^{\,2}}{b}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\,2\ln\varrho\ln\frac{b}{\varrho_1}\right)-a\,\varrho_1^2\,(1+2\ln\varrho_1)\right],$$

wobei

$$N_1=\varrho^2-\varrho_1^2+2\,\varrho_1^2\ln\frac{\varrho_1}{\varrho}$$

ist.

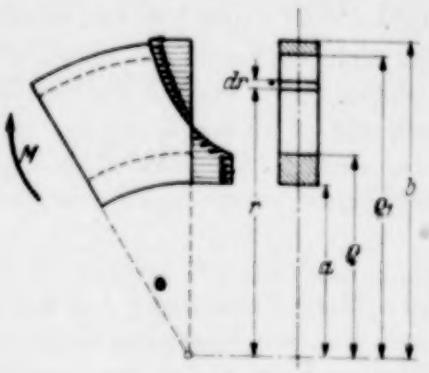

Abb. 5.

Wenn man die erhaltenen Werte von A, B und C in (7) und (8) einsetzt, so erhält man folgende endgültige Formeln für die Spannungen in der elastischen Zone beim zweiten Spannungszustand:

$$\sigma_t=\frac{\sigma_s}{N_1\,\varrho\,r^2}\left\{\varrho_1^2\,r^2\left[\varrho\left(\ln\frac{b\,\varrho_1}{r^2}+2\ln\frac{b}{\varrho_1}\ln\frac{r}{\varrho}-2\right)+a\left(1+\ln\frac{r}{\varrho_1}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\,a\,\varrho^2\left[r^2\ln\frac{r}{\varrho}+\varrho_1^2\left(\ln\frac{\varrho_1}{\varrho}-1\right)\right]+\varrho^3\left[r^2+\varrho_1^2\left(1-\ln\frac{b}{\varrho_1}\right)\right]\right\}, \tag{27}$$

$$\sigma_r=\frac{\sigma_s}{N_1\,\varrho\,r^2}\left\{\varrho_1^2\,r^2\left[\varrho\left(\ln\frac{\varrho_1^{\,3}}{b\,r^2}+2\ln\frac{b}{\varrho_1}\ln\frac{r}{\varrho}\right)+a\ln\frac{r}{\varrho_1}\right]+\right.$$
$$\left.+\,\varrho^2\,\varrho_1^2\left[\varrho\left(\ln\frac{b}{\varrho_1}-1\right)+a\left(1-\ln\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)\right]+\varrho^2\,r^2\left[a\left(\ln\frac{r}{\varrho}-1\right)+\varrho\right]\right\}. \tag{28}$$

In (27) und (28) sind ϱ und ϱ_1 noch unbekannte Größen. Zu ihrer Ermittlung sind noch zwei Gleichungen erforderlich. Die erste erhält man, indem man an Stelle von A, B und C deren Werte in (26) einsetzt.

Nach einigen Umformungen ergibt sich

$$\varrho\,\varrho_1^2\left(2\ln\frac{b}{\varrho}-3\right)+a\,(\varrho_1^2-\varrho^2)+2\,\varrho^2\left(a\ln\frac{\varrho_1}{\varrho}-\varrho\ln\frac{b}{\varrho_1}+\frac{3}{2}\,\varrho\right)=0\,. \tag{29}$$

Um die fehlende Gleichung zu erhalten, betrachten wir die Gleichgewichtsbedingungen eines Stabteiles (Abb. 5). In gleicher Weise wie im ersten Spannungszustand ersieht man, daß

1. die über den Querschnitt verteilen Spannungen σ_t keine Resultierende haben, und daß
2. das Moment dieser Spannungen dem Moment der äußeren Kräfte größenmäßig gleich, aber dem Sinne nach entgegengesetzt ist.

Die erste Bedingung lautet

$$\int_{\varrho}^{\varrho_1}\sigma_t\,dr+\sigma_s\,(\varrho-a)-\int_{\varrho_1}^{b}\sigma_s\left(1-\ln\frac{b}{r}\right)dr=\left[\frac{d\,\varphi}{d\,r}\right]_{\varrho}^{\varrho_1}+\sigma_s\,(\varrho-a)-\sigma_s\,\varrho_1\ln\frac{b}{\varrho_1}=\left[\frac{A}{\varrho_1}+\right.$$
$$\left.+\,B\,(\varrho_1+2\,\varrho_1\ln\varrho_1)+2\,C\,\varrho_1\right]-\left[\frac{A}{\varrho}+B\,(\varrho+2\,\varrho\ln\varrho)+2\,C\,\varrho\right]+\sigma_s\,(\varrho-a)-\sigma_s\,\varrho_1\ln\frac{b}{\varrho_1}=0\,. \tag{30}$$

Der Ausdruck, der in der ersten eckigen Klammer steht, ist auf Grund von (25) gleich $\sigma_s \varrho_1 \ln \frac{b}{\varrho_1}$, und der in der zweiten Klammer stehende Ausdruck ist auf Grund von (24) gleich $\sigma_s (\varrho - a)$. Auf diese Weise kommt man zur Indentität: $0 = 0$.

Die zweite Bedingung ist

$$\left.\begin{aligned} -M = \int_{\varrho}^{\varrho_1} \sigma_t\, r\, dr + \frac{\sigma_s}{2}(\varrho^2 - a^2) - \int_{\varrho_1}^{b} \sigma_s \left(1 - \ln\frac{b}{r}\right) r\, dr = \left[r\frac{d\varphi}{dr}\right]_{\varrho}^{\varrho_1} - \left[\varphi\right]_{\varrho}^{\varrho_1} + \\ + \frac{\sigma_s}{2}(\varrho^2 - a^2) - \frac{\sigma_s}{4}(b^2 - \varrho_1^2) - \frac{\sigma_s}{2}\varrho_1^2 \ln\frac{b}{\varrho_1} = \left[A + B(\varrho_1^2 + 2\varrho_1^2 \ln \varrho_1) + 2C\varrho_1^2\right] - \\ - \left[A + B(\varrho^2 + 2\varrho^2 \ln \varrho) + 2C\varrho^2\right] - \left[A \ln\frac{\varrho_1}{\varrho} + B(\varrho_1^2 \ln \varrho_1 - \varrho^2 \ln \varrho) + C(\varrho_1^2 - \varrho^2)\right] + \\ + \frac{\sigma_s}{2}(\varrho^2 - a^2) - \frac{\sigma_s}{4}(b^2 - \varrho_1^2) - \frac{\sigma_s}{2}\varrho_1^2 \ln\frac{b}{\varrho_1}. \end{aligned}\right\} \quad (30')$$

Unter Berücksichtigung, daß der in der ersten eckigen Klammer stehende Ausdruck auf Grund von (25) gleich $\sigma_s \varrho_1^2 \ln b/\varrho_1$ ist, und daß der in der zweiten Klammer stehende Ausdruck nach (24) gleich $\sigma_s \varrho(\varrho - a)$ ist, erhält man nach Einsetzen der Werte von A, B nnd C

$$\left.\begin{aligned} a(\varrho^4 + \varrho_1^4) + 2\varrho^3\left[2k - \varrho_1^2\left(\ln\frac{\varrho^2 b}{\varrho_1^3} + 2\ln\frac{b}{\varrho_1}\ln\frac{\varrho_1}{\varrho} - \frac{3}{2}\right)\right] + \\ + \varrho\,\varrho_1^2\left\{4k\left(2\ln\frac{\varrho_1}{\varrho} - 1\right) + \varrho_1^2\left(2\ln\frac{b}{\varrho} - 3\right) + 2a\varrho\left[2\left(\ln\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)^2 - 1\right]\right\} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

wobei

$$k = \frac{M}{\sigma_s} - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$

ist. Nach Ermittlung der Radien ϱ und ϱ_1 aus (29) und (31) kann man nach den Formeln (27) und (28) die Spannungen in einer beliebigen Faser bestimmen.

Der Wert r, der dem größten Wert von σ_r entspricht, ist

$$r = \sqrt{\frac{2\varrho^2\varrho_1^2\left[\varrho\left(\ln\frac{b}{\varrho_1} - 1\right) + a\left(1 - \ln\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)\right]}{2\varrho\varrho_1^2\left(\ln\frac{b}{\varrho_1} - 1\right) + a(\varrho_1^2 + \varrho^2)}}. \quad (32)$$

Die Lage der Nullinie kann man aus der Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1^2 r^2\left[\varrho\left(\ln\frac{b\varrho_1}{r^2} + 2\ln\frac{b}{\varrho_1}\ln\frac{r}{\varrho} - 2\right) + a\left(1 + \ln\frac{r}{\varrho_1}\right)\right] + \\ + \varrho^2\left\{a\left[r^2\ln\frac{r}{\varrho} + \varrho_1^2\left(\ln\frac{\varrho_1}{\varrho} - 1\right)\right] + \varrho\left[r^2 + \varrho_1^2\left(1 - \ln\frac{b}{\varrho_1}\right)\right]\right\} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

bestimmen. Setzt man in (29) $\varrho_1 = b$, so erhält man die Gleichung

$$2\varrho\ln\frac{b}{\varrho}(a\varrho + b^2) + (\varrho^2 - b^2)(3\varrho - a) = 0, \quad (34)$$

woraus der Wert von ϱ bei Beginn des Fließvorganges in den oberen Fasern des Querschnittes ermittelt werden kann.

Den entsprechenden Wert des Biegungsmomentes erhält man bei Ersetzen von ϱ_1 durch b in (31) und Auflösen der Gleichung nach M. Dann ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} M = \frac{\sigma_s\left\{\varrho^3\left[a(\varrho - 2a) + 2b^2\left(1 + 2\ln\frac{b}{\varrho}\right)\right] + 2a\varrho b^2\left[a - \varrho + 2\ln\frac{b}{\varrho}\left(\varrho\ln\frac{b}{\varrho} - a\right)\right] + b^4(a - 2\varrho)\right\}}{4\varrho\left(b^2 - \varrho^2 - 2b^2\ln\frac{b}{\varrho}\right)}. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Wir wollen jetzt annehmen, daß das ganze Material infolge der Zunahme der Momente in den Fließzustand übergegangen ist. Dann erhalten (30) und (30′) folgende Form:

$$\sigma_s(\varrho - a) - \int_{\varrho}^{b} \sigma_s\left(1 - \ln\frac{b}{r}\right) dr = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\sigma_s}{2}(\varrho^2 - a^2) - \int_{\varrho}^{b} \sigma_s\left(1 - \ln\frac{b}{r}\right) r\, dr = -M, \quad (37)$$

wobei ϱ der Abstand von dem Krümmungsmittelpunkt bis zur Grenze zwischen der oberen und unteren plastischen Zone ist.

Daraus folgt

$$\varrho - a = \varrho \ln \frac{b}{\varrho}, \tag{38}$$

$$M = \frac{\sigma_s}{4}\left[\varrho^2\left(2\ln\frac{b}{\varrho} - 3\right) + b^2 + 2a^2\right]. \tag{39}$$

Mit Hilfe der beiden letzten Gleichungen kann man den Grenzwert desjenigen Momentes feststellen, bei dessen Wirkung das ganze Material in den Fließzustand übergehen muß. Außerdem kann man die Grenze zwischen der plastischen Zug- und Druckzone ermitteln[1]. Man kann leicht erkennen, daß die Radialspannungen σ_r die Bedingung des stetigen Überganges an der Grenze der plastischen Zonen befriedigen. Tatsächlich kann σ_r hier auf zweierlei Art ausgedrückt werden, als $\sigma_s\left(1 - \frac{a}{\varrho}\right)$ und als $\sigma_s \ln \frac{b}{\varrho}$. Es ist aber

$$\sigma_s\left(1 - \frac{a}{\varrho}\right) = \sigma_s \ln \frac{b}{\varrho},$$

was unmittelbar aus der Gleichgewichtsgleichung (36) folgt.

Zum Schluß deuten wir einen möglichen Lösungsweg der Aufgabe an für den Fall, daß auf den Flächen des Elementes *mnpq* (Abb. 2) außer den normalen Spannungen auch Schubspannungen wirken. Es kann dies dann auftreten, wenn das Moment der äußeren Kräfte für die verschiedenen Querschnitte veränderlich ist, z. B. im Falle eines gekrümmten Stabes mit kreisförmiger Achse, der an einem Ende eingespannt und am anderen Ende durch eine Kraft belastet ist.

Die Gleichgewichtsbedingungen eines kleinen Elementes haben sowohl für die elastische als auch für die plastische Zone die gleiche Form

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{2\tau}{r} = 0. \tag{40}$$

Bekanntlich werden[2] diese Bedingungen erfüllt, wenn man annimmt

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}, \qquad \sigma_t = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \qquad \tau = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r\, \partial \vartheta}, \tag{41}$$

wobei φ die Spannungsfunktion ist.

In dem elastischen Bereich muß die Funktion φ so gewählt werden, daß sie die Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}\right) = 0 \tag{42}$$

befriedigt.

Für den plastischen Bereich kann man an Stelle der Gleichung (42) die Plastizitätsbedingung nehmen. Nach *Mises-Hencky* hat in dem zu betrachtenden Falle die Plastizitätsbedingung folgende Form:

$$\sigma_t^2 - \sigma_t \sigma_r + \sigma_r^2 + 3\tau^2 = \sigma_s^2. \tag{43}$$

Setzt man statt σ_t, σ_r und τ in (43) ihre Werte (41) ein, so erhält man folgende partielle Differentialgleichung:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \\ &+ \frac{1}{r^4}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}\right)^2 + \frac{3}{r^4}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\right)^2 - \frac{6}{r^3}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r\, \partial \vartheta} + \frac{3}{r^2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r\, \partial \vartheta}\right)^2 - \sigma_s^2 = 0.\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Die Spannungsfunktion der plastischen Zone muß diese Gleichung befriedigen.

Die Gleichungen (42) und (44) in Verbindung mit den Bedingungen an den Grenzen der elastischen und der plastischen Zone ergeben die Möglichkeit, die Spannungsfunktion für den elastischen und den plastischen Bereich zu ermitteln, und zwar nicht nur in obigem Falle, sondern auch in einer Reihe anderer Fälle des ebenen Spannungszustandes.

---

[1] In Wirklichkeit tritt, ehe das Moment die Größe (39) erreicht, die Verfestigung des Materials ein.

[2] Siehe z. B. *S. Timoshenko*, Theory of Elasticity, S. 53, oder *A. Föppl* und *L. Föppl*, Drang und Zwang, S. 311.

3. Näherungstheorie. a) Allgemeines. Nun betrachten wir eine Näherungstheorie, die auf der Annahme beruht, daß die Stabquerschnitte bei der Biegung eben bleiben und daß die seitliche Pressung zwischen den Längsfasern außer acht gelassen werden kann.

Die Stabachse ist eine beliebige ebene Kurve.

Man setzt voraus, daß das Material des Stabes einen langen Fließteil in der Spannungs-Dehnungs-Linie hat, der das idealisierte *Prandtl*-Diagramm (Abb. 6) anzunehmen erlaubt. Man nimmt fernerhin an, daß die Biegungsmomente in der Krümmungsebene wirken, und daß jeder Stabquerschnitt eine Symmetrieachse hat, die in der Krümmungsebene liegt.

Außerdem werden wir den Einfluß der Querschnittsformänderungen auf die Spannungsverteilung und Deformationen außer acht lassen und den Fall der reinen Biegung betrachten.

Auf Grund dieser Annahmen untersuchen wir den Spannungszustand des gekrümmten Stabes bei elastisch-plastischer Biegung und ermitteln die Lage der Nullachse und der Grenze zwischen der elastischen und der plastischen Zone. Wir bestimmen auch die Grenztragfähigkeit des krummen Stabes und entwickeln die Formeln zur Ermittlung der Verschiebungen der Stabachse. Die Spannung im elastischen Bereich läßt sich folgendermaßen darstellen[1]:

$$\sigma = \frac{E\,\delta\,d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y}{r+y}\,. \tag{45}$$

Dabei ist r der Krümmungsradius der neutralen Fläche (Abb. 7) und y der Abstand einer beliebigen Faser von der neutralen Achse. Da die Spannungen in den äußersten Längsfasern nicht

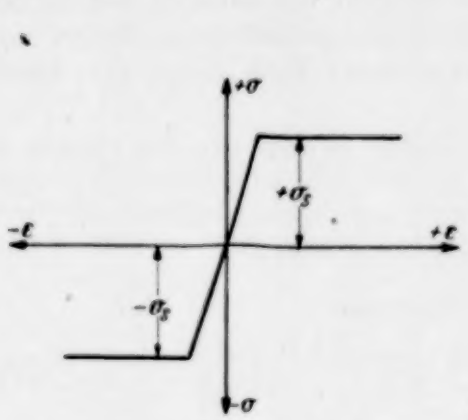

Abb. 6.

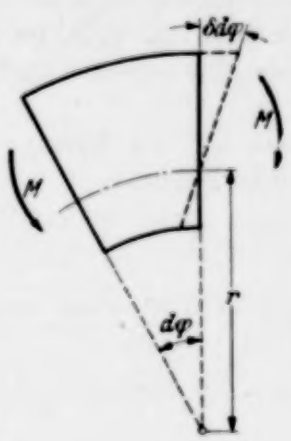

Abb. 7.

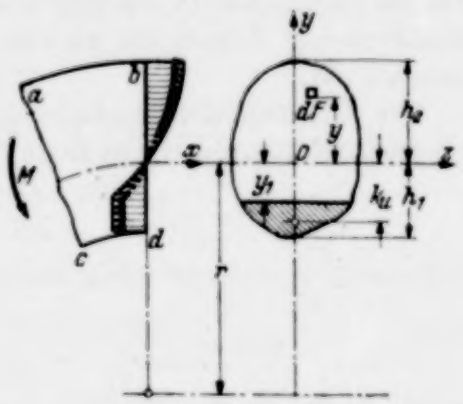

Abb. 8.

gleich sind, so müssen zunächst die plastischen Formänderungen nur einseitig von der neutralen Fläche, entweder in den oberen oder in den unteren am meisten gespannten Fasern auftreten. Im Falle einer Zunahme der Momente können plastische Deformationen auch beiderseits der neutralen Fläche entstehen.

Deshalb muß man zwei Spannungszustände untersuchen:

1. Plastische Formänderungen nur auf einer Seite der neutralen Fläche.
2. Plastische Formänderungen beiderseits der neutralen Fläche.

b) Erster Spannungszustand. Die meisten der gebräuchlichen Querschnitte (rechteckiger, kreisförmiger, I-förmiger) haben bei der Biegung die maximalen Normalspannungen in den Fasern der konkaven Fläche. Deshalb wollen wir ferner voraussetzen, daß die Plastizierung zunächst in den Fasern, die in der Nähe dieser Fläche liegen, auftritt.

Die Spannung im plastischen Bereich läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$\sigma_s = \frac{E\,\delta\,d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y_1}{r-y_1}\,, \tag{46}$$

worin σ_s die Fließgrenze und y_1 der Abstand von der neutralen Achse bis zur Grenze der plastischen Zone ist (Abb. 8).

Die Summe der Projektionen aller auf das Element *abcd* wirkenden Kräfte auf die x-Achse liefert folgende Gleichgewichtsbedingung:

$$\int_{(F_e)} \frac{E\,\delta\,d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y\,dF}{r+y} - \frac{E\,\delta\,d\varphi}{d\varphi}\,\frac{F_u\,y_1}{r-y_1} = 0\,.$$

[1] Siehe z. B. *S. Timoshenko* und *J. M. Lessels*, Festigkeitslehre, S. 124, Berlin 1928.

Dabei ist F_u der Flächeninhalt des Querschnittes der plastischen Zone und F_e der Flächeninhalt für die elastische Zone.

Daraus folgt

$$\int_{(F_e)} \frac{y\,dF}{r+y} = \frac{F_u y_1}{r-y_1}\,. \tag{47}$$

Das resultierende Kräftepaar der über den Querschnitt verteilten Spannungen muß mit dem äußeren Kräftepaar im Gleichgewicht stehen.

Also ist

$$M = \int_{(F_e)} \frac{E\delta\,d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y^2\,dF}{r+y} + \frac{E\delta\,d\varphi}{d\varphi}\,\frac{F_u y_1 k_u}{r-y_1} = \frac{E\delta\,d\varphi}{d\varphi}\left(\int_{(F_e)} y\,dF - r\int_{(F_e)} \frac{y\,dF}{r+y} + \frac{F_u y_1 k_u}{r-y_1}\right), \tag{48}$$

wobei k_u der Abstand von der neutralen Achse bis zum Schwergewicht der plastischen Zone ist.

Das in der Klammer stehende erste Integral stellt das statische Moment S_e der Querschnittsfläche der elastischen Zone in bezug auf die neutrale Achse dar.

Den Wert des zweiten Integrals gibt (47) an. Aus (46) folgt

$$\frac{E\delta\,d\varphi}{d\varphi} = \sigma_s \frac{r-y_1}{y_1}\,. \tag{49}$$

Setzt man (49) und (47) in (48) ein, so erhält man

$$\frac{M}{\sigma_s} = \frac{S_e(r-y_1)}{y_1} + F_u(k_u - r)\,. \tag{50}$$

Das dem Anfang des Fließvorganges in der unteren Zone entsprechende Moment M' findet man aus (50), wenn man $F_u = 0$ und $y_1 = h_1$ setzt. Dann ergibt sich

$$M' = \sigma_s S \frac{r-h_1}{h_1}\,. \tag{51}$$

wobei S das statische Moment des ganzen Querschnittes in Bezug auf die Nullinie ist.

Aus den Gleichungen (47) und (50) kann man die Werte r und y_1 ermitteln. Damit wird die Lage der Nullinie und der Grenze zwischen dem elastischen und dem plastischen Bereich bestimmt. Errechnet man den Wert $E\,\delta\,d\varphi/d\varphi$ aus (48), und substituiert man ihn in (45), so ergibt sich folgender Ausdruck für die Spannungen im elastischen Bereich:

$$\sigma = \frac{M}{S_e + \dfrac{F_u y_1}{r-y_1}(k_u - r)}\,\frac{y}{r+y}\,. \tag{52}$$

Setzt man in (52) $y = h_2$ und $\sigma = \sigma_s$ ein und ermittelt man M, so erhält man folgenden Wert des Biegungsmomentes, das dem Anfang des Fließvorganges in der oberen Zone entspricht:

$$M = \sigma_s\left[S_e + \frac{F_u y_1 (k_u - r)}{r-y_1}\right]\frac{r+h_2}{h_2}\,. \tag{53}$$

Aus (53), (47) und (50) kann man die Größen M, r und y_1 bestimmen.

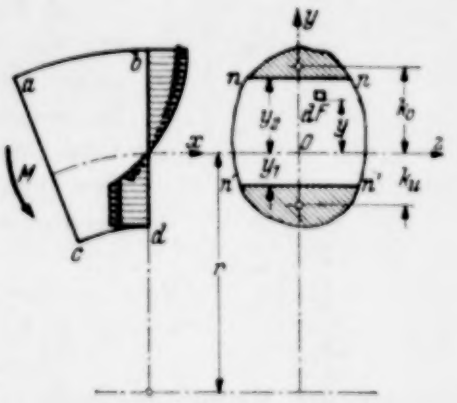

Abb. 9.

c) Zweiter Spannungszustand. Die absoluten Größen der Spannungen in den Punkten der Geraden nn und $n'n'$ sind gleich. Deshalb ist

$$\frac{y_1}{r-y_1} = \frac{y_2}{r+y_2}\,. \tag{54}$$

Dabei ist y_2 der Abstand der plastischen Zugzone von der z-Achse. Die erste Gleichgewichtsgleichung des Elementes $abcd$ (Abb. 9) lautet

$$\int_{(F_e)} \frac{E\delta\,d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y\,dF}{r+y} - \frac{E\delta\,d\varphi}{d\varphi}\left(\frac{y_1 F_u}{r-y_1} - \frac{y_2 F_0}{r+y_2}\right) = 0\,,$$

wobei F_u der Flächeninhalt des Querschnittes der Druckzone und F_0 derjenige für die Zugzone ist. Aus dieser Gleichung ergibt sich mit Hilfe von (54)

$$\int_{(F_e)} \frac{y\,dF}{r+y} = \frac{y_1}{r-y_1}(F_u - F_0)\,. \tag{55}$$

Man kann die zweite Gleichgewichtsbedingung unter Benützung von (54) und (55) in folgender Form darstellen:

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{E\,\delta\,d\varphi}{d\varphi}\left(\int\limits_{(F_e)}\frac{y^2\,dF}{r+y}+\frac{F_u\,y_1\,k_u}{r-y_1}+\frac{F_0\,y_2\,k_0}{r+y_2}\right)\\ &= \frac{E\,\delta\,d\varphi}{d\varphi}\left[\int\limits_{(F_e)} y\,dF-\frac{r\,y_1}{r-y_1}(F_u-F_0)+\frac{y_1}{r-y_1}(F_u\,k_u+F_0\,k_0)\right]\\ &= \frac{E\,\delta\,d\varphi}{d\varphi}\left\{S_e+\frac{y_1}{r-y_1}\left[F_u(k_u-r)+F_0(k_0+r)\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Dabei ist k_u der Abstand von der z-Achse bis zum Schwerpunkt der plastischen Druckzone, k_0 ist derselbe Abstand für die plastische Zugzone. Substituiert man (49) in (56), so ergibt sich

$$\frac{M}{\sigma_s}=S_e\frac{r-y_1}{y_1}+F_u\,(k_u-r)+F_0\,(k_0+r)\,. \tag{57}$$

Aus (57), (55) und (54) kann man die Werte r, y_1 und y_2 ermitteln. Bestimmt man aus (56) den Wert von $E\,\delta\,d\varphi/d\varphi$, und setzt man ihn in (45) ein, so erhält man die Formel für die Spannungen im elastischen Bereich in folgender endgültiger Form:

$$\sigma=\frac{M}{S_e+\frac{y_1}{r-y_1}\left[F_u(k_u-r)+F_0(k_0+r)\right]}\,\frac{y}{r+y}\,. \tag{58}$$

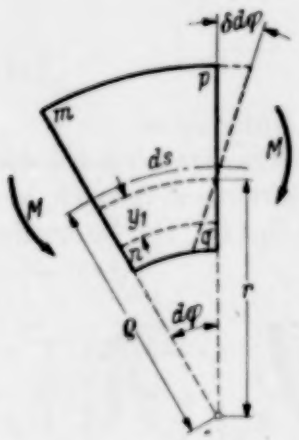

Abb. 10.

Beim Einsetzen von $F_u=F_0=0$ und $S_e=S$ in (58), ergibt sich die bekannte Formel für die Spannungen bei elastischer Biegung

$$\sigma=\frac{M}{S}\,\frac{y}{r+y}\,.$$

Es ist zu beachten, daß die Nullinie bei elastisch-plastischer Biegung mit der Zunahme des Biegungsmomentes ihre Lage ebenfalls ändert.

d) Formänderungen. Jetzt entwickeln wir die Grundformeln für die Formänderungen der gekrümmten Stäbe bei elastisch-plastischer Biegung. Man betrachtet ein Element des Stabes (Abb. 10), bei welchem sich unter der Wirkung der Momente M an der konkaven Oberfläche eine plastische Zone gebildet hat. Der Drehungswinkel $\delta\,d\varphi$ des Querschnittes pq gegenüber mn infolge der Formänderung des Elementes $mnpq$ wird auf Grund von (48) und (47) sein

$$\delta\,d\varphi=\frac{M\,d\varphi}{E\left[S_e+\frac{F_u\,y_1}{r-y_1}(k_u-r)\right]}=\frac{M\,ds}{E\,\varrho\left[S_e+\frac{F_u\,y_1}{r-y_1}(k_u-r)\right]}\,, \tag{59}$$

worin ϱ der Krümmungsradius der geometrischen Achse ist. Bildet sich die plastische Zone sowohl an der konkaven als auch an der konvexen Fläche, so ist

$$\delta\,d\varphi=\frac{M\,ds}{E\,\varrho\left\{S_e+\frac{y_1}{r-y_1}\left[F_u(k_u-r)+F_0(k_0+r)\right]\right\}}\,. \tag{60}$$

Nun untersuchen wir, wie sich die Formänderung des zu betrachtenden Elementes auf die Verschiebung eines beliebigen Punktes A des gekrümmten Stabes auswirkt. Man nimmt an, daß x_0 und y_0 die Koordinaten des Punktes A, x und y die Koordinaten des Querschnittes pq; δx_0 und δy_0 die Komponenten der Verschiebung des Punktes A, die durch Drehung des Querschnittes pq um den Winkel $\delta\,d\varphi$ hervorgerufen wurde, sind (Abb. 11). Ersetzt man $\sin(\delta\,d\varphi)$ und $\cos(\delta\,d\varphi)$ durch entsprechende Reihenentwicklungen und vernachlässigt man die unendlich kleinen Größen zweiter und höherer Ordnungen, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \delta x_0 = AD\left[\cos(\alpha-\delta\,d\varphi)-\cos\alpha\right] &= \frac{y_0-y}{\sin\alpha}\left\{\cos\alpha\left[\left(1-\frac{\delta\,d\varphi^2}{2!}+\cdots\right)-1\right]+\right.\\ &\left.+\sin\alpha\left(\delta\,d\varphi-\frac{\delta\,d\varphi^3}{3!}+\cdots\right)\right\}=(y_0-y)\,\delta\,d\varphi\,, \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

$$\delta y_0 = A D\left[\sin\alpha - \sin(\alpha - \delta d\varphi)\right] = \frac{x_0 - x}{\cos\alpha}\left\{\sin\alpha\left[1-\left(1-\frac{\delta d\varphi^2}{2!}+\cdots\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\cos\alpha\left(\delta d\varphi - \frac{[\delta d\varphi^3}{3!}+\cdots\right)\right\} = (x_0 - x)\,\delta d\varphi \,. \tag{62}$$

Wenn man in (61) und (62) an Stelle von $\delta d\varphi$ die vorher erhaltenen Werte einsetzt, so ergeben sich folgende Ausdrücke für die horizontalen (f_h) und vertikalen (f_v) Verschiebungen des Querschnittes A infolge der Formänderung des Teiles $0\,A^1$.

$$f_h = \sum\int_{(s_i)} \frac{M(y_0 - y)\,ds}{E\varrho S} + \sum\int_{(s_k)} \frac{M(y_0 - y)\,ds}{E\varrho\left[S_e + \frac{F_u y_1}{r - y_1}(k_u - r)\right]} +$$
$$+ \sum\int_{(s_k')} \frac{M(y_0 - y)\,ds}{E\varrho\left\{S_e + \frac{y_1}{r - y_0}\left[F_u(k_u - r) + F_0(k_0 + r)\right]\right\}}. \tag{63}$$

$$f_v = \sum\int_{(s_i)} \frac{M(x_0 - x)\,ds}{E\varrho S} + \sum\int_{(s_k)} \frac{M(x_0 - x)\,ds}{E\varrho\left[S_e + \frac{F_u y_1}{r - y_1}(k_u - r)\right]} +$$
$$+ \sum\int_{(s_k')} \frac{M(x_0 - x)\,ds}{E\varrho\left\{S_e + \frac{y_1}{r - y_1}\left[F_u(k_u - r) + F_0(k_0 + r)\right]\right\}}. \tag{64}$$

wobei s_i die Länge eines elastisch deformierten Abschnittes des Stabes, s_k die Länge eines elastisch-plastisch deformiertesn Stababschnittes mit einseitiger plastischer Zone (an der konkaven Fläche) und s_k' die Abschnittslänge mit beiderseitiger plastischer Zone sind.

Infolge Formänderung des ganzen Teiles $0\,A$ erhält der Querschnitt A eine Drehung um den Winkel

$$\vartheta = \sum\int_{(s_i)} \frac{M\,ds}{E\varrho S} + \sum\int_{(s_k)} \frac{M\,ds}{E\varrho\left[S_e + \frac{F_u y_1}{r - y_1}(k_u - r)\right]} +$$
$$+ \sum\int_{(s_k')} \frac{M\,ds}{E\varrho\left\{S_e + \frac{y_1}{r - y_1}\left[F_u(k_u - r) + F_0(k_0 + r)\right]\right\}}. \tag{65}$$

Man muß beachten, daß die von uns erhaltenen Formeln (63), (64) und (65) nur Näherungsformeln sind, und daß man sie nur in den Fällen anwenden darf, wo die Deformation des gekrümmten Stabes gering und der Einfluß der Längs- und Querkräfte unwesentlich ist[2].

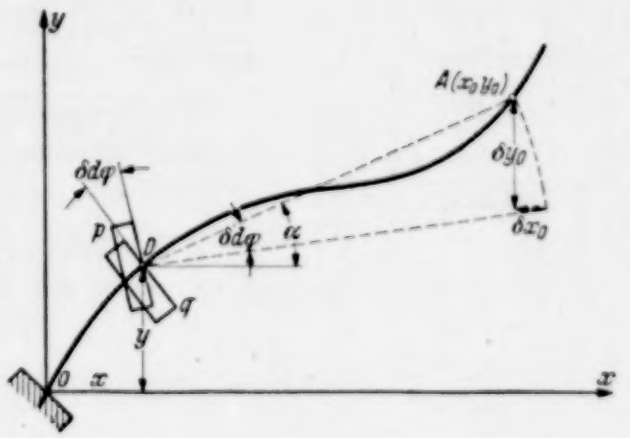

Abb. 11.

Diese Gleichungen vereinfachen sich wesentlich für Stäbe mit schwacher Krümmung.

Den Wert des Winkels $\delta d\varphi$ kann man in diesem Fall unmittelbar aus (56) erhalten, wenn man annimmt, daß die Querschnittshöhe gegenüber r gering ist.

Dann kann man die Größen y, y_1 und y_2 in den Nennern in (56) gegenüber r außer acht lassen. Nachdem wir auf diese Weise das Hyperbelgesetz der Spannungsverteilung in der elastischen Zone durch ein geradliniges ersetzen, können wir annehmen, daß $y_2 = y_1$ ist.

Dann erhält die Gleichung (56) folgende Form:

$$M = \frac{E\,\delta d\varphi}{r\,d\varphi}\left(J_e + F_u k_u y_1 + F_0 k_0 y_2\right) = \frac{E\,\delta d\varphi}{r\,d\varphi}\left[J_e + (S_u + S_0)\,y_1\right],$$

[1] Wir setzen hier den allgemeinen Fall der Biegung voraus und lassen die Wirkung der Längs- und Querkräfte außer acht.

[2] Bei Entwicklung dieser Formeln ließen wir auch den Einfluß des Biegungsmomentes auf die Verlängerung oder Verkürzung der Stabachse außer acht.

wobei S_u und S_0 die absoluten Größen der statischen Momente der plastischen Zonen und J_e das Trägheitsmoment der elastischen Zone sind. Hieraus folgt

$$\delta d\varphi = \frac{M ds}{E[J_e + (S_u + S_0) y_1]} . \tag{66}$$

Hier haben wir wegen der geringen Krümmung des Stabes angenommen, daß $ds = \varrho d\varphi = r d\varphi$ ist (Abb. 10).

Ist die plastische Zone nur auf der einen Seite von der neutralen Fläche, so muß man in (66) S_0 oder S_u gleich Null setzen. Setzt man in (61) und (62) für $\delta d\varphi$ seinen Wert (66) ein, so ergeben sich leicht die Formeln (63), (64) und (65) zur Ermittlung der Formänderungen in Stäben mit schwacher Krümmung.

Es ist zu bemerken, daß die bekannte Differentialgleichung für die radialen Verschiebungen bei elastischer Biegung eines Stabes mit kreisförmiger Achse, die von *J. Bussinesq* gefunden wurde und die folgende Form hat[1]:

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = \frac{M r^2}{EJ} ,$$

leicht für den Fall elastisch-plastischer Formänderungen umgeformt werden kann.

Die Krümmungsveränderung Δ in einem beliebigen Querschnitt ist auf Grund von (66)

$$\Delta = \frac{\delta d\varphi}{ds} = \frac{M}{E[J_e + (S_u + S_0) y_1]} . \tag{67}$$

Ersetzen wir in der *Boussinesq*schen Gleichung M/EJ durch den Ausdruck (67), so erhalten wir folgende Differentialgleichung für die elastisch-plastisch deformierten Stabteile:

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = \frac{M r^2}{E[J_e + (S_u + S_0) y_1]} , \tag{68}$$

wobei w die radiale Verschiebung des durch den Winkel φ bestimmten Querschnittes ist. Für die Stabteile, welche die plastische Zone nur auf einer Seite von der neutralen Fläche haben, muß man in (68) S_u oder S_0 gleich Null setzen. Für einen Stab mit rechteckigem Querschnitt ist

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = \frac{M_f r^2}{EJ\sqrt{3 - \frac{2M}{M_f}}} . \tag{68'}$$

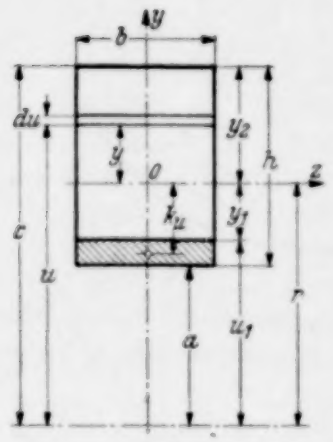

Abb. 12.

Dabei ist M das Biegemoment in einem beliebigen Querschnitt und $M_f = \frac{b h^2}{6} \sigma_s$.

Wir betrachten jetzt die Verwendung der gefundenen allgemeinen Zusammenhänge im Falle eines krummen Stabes mit rechteckigem Querschnitt.

c) Rechteckiger Querschnitt; erster Spannungszustand. Man ersieht aus Abb. 12, daß

$$F_u = b(r - y_1 - a)$$

ist. Hieraus folgt, daß die rechte Seite von (47) wird

$$\frac{F_u y_1}{r - y_1} = b y_1 \left(1 - \frac{a}{r - y_1}\right) . \tag{69}$$

Die linke Seite kann man folgendermaßen darstellen:

$$\int\limits_{(F_e)} \frac{y\, dF}{r + y} = b \int\limits_{u_1}^{c} \frac{u - r}{u}\, du = b\left[(c - u_1) - r \ln \frac{c}{u_1}\right] = b\left(y_1 + y_2 - r \ln \frac{c}{r - y_1}\right) . \tag{70}$$

Setzt man (69) und (70) gleich, so erhält man

$$y_2 + \frac{a y_1}{r - y_1} = r \ln \frac{c}{r - y_1} . \tag{71}$$

[1] *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, S. 306, Berlin 1939.

Ferner ist

$$S_e = \frac{b}{2}(y_2^2 - y_1^2), \qquad k_u - r = \frac{1}{2}(y_1 - r - a), \qquad F_u(k_u - r) = \frac{b}{2}\left[a^2 - (r - y_1)^2\right].$$

Man kann die zweite Gleichgewichtsbedingung (50) in folgender Form darstellen:

$$\frac{M}{\sigma_s} = \frac{b}{2}\left[a^2 + \frac{r - y_1}{y_1}(y_2^2 - y_1 r)\right]. \tag{72}$$

Substituiert man $r = c - y_2$ in (71) und (72), so erhält man

$$y_2 + \frac{a y_1}{c - y_1 - y_2} = (c - y_2) \ln \frac{c}{c - y_1 - y_2}, \tag{71'}$$

$$\frac{M}{\sigma_s} = \frac{b}{2}\left[a^2 + \frac{c - y_1 - y_2}{y_1}(y_2^2 - y_1 c + y_1 y_2)\right]. \tag{72'}$$

Die Auflösung der Gl. (71') und (72') kann man wesentlich vereinfachen, wenn man die Substitution

$$y_2 = \frac{v + t}{2}, \qquad y_1 = \frac{v - t}{2} \tag{73}$$

anwendet. Dann erhält man aus (72') nach einigen Umformungen

$$t = \frac{v\left[A + b(c - v)^2\right]}{A + b(c^2 - v^2)}, \tag{74}$$

worin

$$A = \frac{2M}{\sigma_s} - b a^2$$

ist. Man kann jetzt mit Hilfe von (74) und (73) die Gleichung (71') folgendermaßen darstellen:

$$\ln \frac{c}{c - v} = \frac{v}{c - v}\left[1 - \frac{b h v}{A + b c^2}\right]. \tag{75}$$

Folglich führt die Untersuchung der Spannungsverteilung beim ersten Spannungszustand zur Lösung der transzendenten Gleichung (75). Die Ermittlung des Wertes v kann man mit Hilfe eines der bekannten Näherungsverfahren ausführen. Es ist auch ein anderer Weg möglich. Man kann die Reihenentwicklung

$$\ln \frac{c}{c - v} = \ln \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{v}{c} + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{v^3}{3c^3} + \cdots$$

benutzen, wobei nur die ersten Glieder zu berücksichtigen sind, weil diese Reihe schnell konvergiert. Substituiert man diese Glieder in (75), so erhält man eine algebraische Gleichung, die den Wert von v liefert. Nach Ermittlung von v kann man ohne weiteres alle anderen Größen (t, y_1 und y_2) aus (74) und (73) bestimmen.

f) Rechteckiger Querschnitt, zweiter Spannungszustand. Man ersieht aus Abb. 13, daß

$$F_u = b(r - y_1 - a), \qquad F_0 = b(c - r - y_2)$$

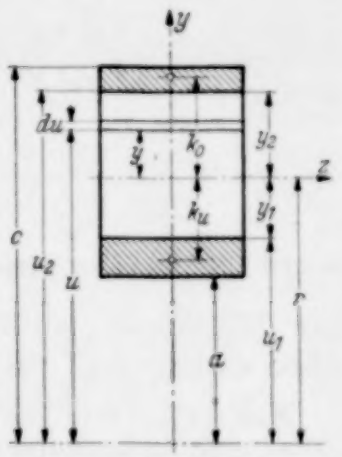

Abb. 13.

ist. Die rechte und die linke Seite der Gleichgewichtsbedingung (55) kann man mit Hilfe von (54) in folgender Form darstellen:

$$\frac{y_1}{r - y_1}(F_u - F_0) = b\left[y_1 + y_2 - \frac{y_1(a + c)}{r - y_1}\right], \tag{76}$$

$$\int_{(F_e)} \frac{y\,dF}{r + y} = b\int_{u_1}^{u_2} \frac{u - r}{u}\,du = b\left(u_2 - u_1 - r \ln \frac{r + y_2}{r - y_1}\right) = b\left(y_1 + y_2 - r \ln \frac{y_2}{y_1}\right). \tag{77}$$

Setzt man (76) und (77) gleich, dann erhält man

$$r \ln \frac{y_2}{y_1} = \frac{y_1}{r - y_1}(a + c). \tag{78}$$

Da

$$S_e = \frac{b}{2}(y_2^2 - y_1^2), \qquad F_u(k_u - r) = \frac{b}{2}\left[a^2 - (r - y_1)^2\right], \qquad F_0(k_0 + r) = \frac{b}{2}\left[c^2 - (r + y_2)^2\right]$$

sind, so geht die zweite Gleichgewichtsgleichung (57) über in

$$\frac{M}{\sigma_s} = \frac{b}{2}\left[a^2 + c^2 - 2r^2 + r(y_1 - y_2)\right]. \tag{79}$$

Aus (54) folgt

$$r = \frac{2y_1 y_2}{y_2 - y_1}. \tag{80}$$

Setzt man diesen Wert r in (78) und (79) ein, so erhält man

$$\ln\frac{y_2}{y_1} = \frac{(a+c)(y_2-y_1)^2}{2y_1y_2(y_2+y_1)}, \tag{78'}$$

$$\frac{M}{\sigma_s} = \frac{b}{2}\left[a^2 + c^2 - \frac{2y_1y_2(y_1+y_2)^2}{(y_2-y_1)^2}\right]. \tag{79'}$$

Man kann die Auflösung von (78′) und (79′) vereinfachen, wenn man die Substitution

$$y_2 + y_1 = v, \quad y_2 - y_1 = t$$

anwendet. Dann folgt aus (79′), daß

$$t^2 = \frac{v^4}{v^2+\mu} \tag{81}$$

ist, worin

$$\mu = 2\left(a^2 + c^2 - \frac{2M}{b\sigma_s}\right).$$

Wir benützen ferner die Reihenentwicklung

$$\ln\frac{y_2}{y_1} = \ln\frac{1+\frac{t}{v}}{1-\frac{t}{v}} = \frac{2t}{v}\left(1 + \frac{t^2}{3v^2} + \frac{t^4}{5v^4} + \cdots\right). \tag{82}$$

Diese Reihe konvergiert sehr schnell, und für die praktische Anwendung ist es ausreichend, nur die zwei ersten Glieder der Reihe zu berücksichtigen. Ersetzt man in (78′) $\ln(y_2/y_1)$ durch zwei Anfangsglieder der Reihe (82), so erhält man nach einigen Umformungen

$$2\left(1 + \frac{t^2}{3v^2}\right) = \frac{\beta t}{v^2 - t^2}, \tag{83}$$

wobei $\beta = 2(a+c)$ ist.

Führt man t aus (81) in (83) ein, so wird

$$\sqrt{v^2+\mu} = \gamma\left(3 + \frac{v^2}{v^2+\mu}\right). \tag{83'}$$

Setzt man

$$\sqrt{v^2+\mu} = \xi,$$

so geht (83′) in die Gleichung dritten Grades,

$$\xi^3 - 4\gamma\xi^2 + \mu\gamma = 0 \tag{84}$$

über, worin $\gamma = \frac{2\mu}{3\beta}$ ist.

Man kann leicht die Lösung von (84) nach den Formeln von *Cardano* oder mit Hilfe der Kreis- und Hyperbelfunktionen finden. Nach Bestimmung von ξ ergeben sich v, t, y_1, y_2 und r aus den Formeln (81), (73) und (80).

Wir wollen jetzt voraussetzen, daß die Momente M allmählich wachsen. Durch Einsetzen von $y_1 = y_2 = 0$ und $r = \frac{1}{2}(a+c)$ in (79) ergibt sich das Grenzmoment M_s, das der vollen Plastizierung des ganzen Querschnittes entspricht,

$$M_s = \frac{\sigma_s b}{4}(c-a)^2 = \sigma_s\frac{bh^2}{4}. \tag{85}$$

Die Tragfähigkeit des gekrümmten Stabes wird theoretisch bei der Wirkung des Momentes M_s erschöpft.

Natürlich werden, bevor das Moment die Größe (85) erreicht, in den äußersten Fasern die Verfestigungsvorgänge schon entstanden sein. Hat aber das Material des Stabes einen langen Fließteil in der Spannungs-Dehnungs-Linie (z. B. Stahl 37), so können die Momente, bei deren Wirkung die Verfestigung noch nicht entstanden ist, sehr nahe an das Moment (85) herankommen.

Man ersieht aus (85), daß der Grenzwiderstand des gekrümmten Stabes gleich dem Grenzwiderstand des geraden Trägers ist, der dieselben Abmessungen und dasselbe Material hat.

4. Beispiele. a) Erstes Zahlenbeispiel (Abb. 14 und 15). Der rechteckige Querschnitt eines stählernen gekrümmten Stabes habe die Abmessungen $b=1$ cm, $h=10$ cm. Es wird angenommen, daß $M=40000$ kgcm, $\sigma_s=2400$ kg/cm², $a=10$ cm und $c=20$ cm sind.

Zuerst ermitteln wir das Moment M', das dem Fließbeginn entspricht. Nach den bekannten Formeln für die elastische Biegung erhält man

$$r=\frac{h}{\ln\frac{c}{a}}=14{,}43\text{ cm},\qquad S=bh\left(\frac{a+c}{2}-r\right)=5{,}72\text{ cm}^3.$$

Aus (51) folgt

$$M'=31000\text{ kgcm}.$$

Auf Grund von (85) ist das Grenzmoment gleich 60000 kgcm. Bei dem oben angenommenen $M=40000$ kgcm tritt der erste Spannungszustand auf. Die Gleichung (75) hat in diesem Fall folgende Form:

$$\ln\frac{20}{20-v}=\frac{v}{20-v}\left(1-\frac{10\,v}{333{,}3}\right).$$

Daraus folgt $v=9{,}1$ cm.

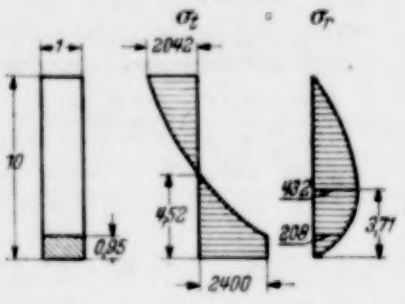

Abb. 14.
$M=400$ kgm. Strenge Lösung.

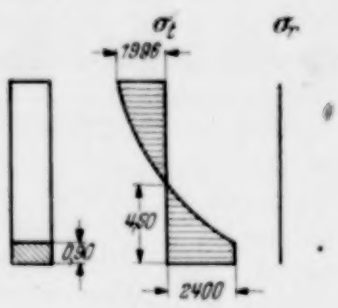

Abb. 15.
$M=400$ kgm. Näherungslösung.

Mit Hilfe von (74) und (73) ergibt sich $t=1{,}9$ cm, $y_1=3{,}6$ cm, $y_2=5{,}5$ cm und $r=14{,}5$ cm. Es entsteht eine plastische Zone nur im unteren Teil des Querschnittes, und zwar hat sie eine Höhe von 0,9 cm (Abb. 15).

Aus (52) kann man die Spannung in einer beliebigen Faser der elastischen Zone bestimmen. Sie ist gleich:

$$\sigma=\frac{7260\,y}{14{,}50+y}.$$

Setzt man $y=5{,}5$ cm ein, so erhält man die Spannung in der äußersten oberen Faser. Sie beträgt 1996 kg/cm².

b) Zweites Zahlenbeispiel (Abb. 16 und 17). Die Abmessungen des Querschnittes sind dieselben, wobei jedoch $M=48000$ kgcm angenommen wird. Es entsteht jetzt der zweite Spannungszustand. Die Beiwerte sind

$$\mu=920\text{ cm}^2,\quad \beta=60\text{ cm},\quad \gamma=10{,}22\text{ cm}.$$

Die Gleichung (84) nimmt folgende Form an:

$$\xi^3-40{,}88\;\xi^2+9400=0.$$

Daraus ergibt sich $\xi=31{,}4$ cm. Dann ist $v=\sqrt{\xi^2-\mu}=8{,}08$ cm. Mit Hilfe von (81), (73) und (80) erhält man

$$t=2{,}08\text{ cm},\quad y_1=3\text{ cm},\quad y_2=5{,}08\text{ cm}\text{ und }r=14{,}66\text{ cm}.$$

Folglich hat die obere plastische Zone eine Höhe von 0,26 cm und die untere von 1,66 cm (Abb. 17). Aus (58) ergibt sich folgendes Gesetz der Spannungsverteilung im elastischen Bereich:

$$\sigma=\frac{9340\,y}{14{,}66+y}.$$

Zum Vergleich bringen wir in den Abb. 14, 16 und 18 die Ergebnisse einer strengen Lösung der Aufgabe auf Grund der in Ziff. 2 behandelten exakten Theorie.

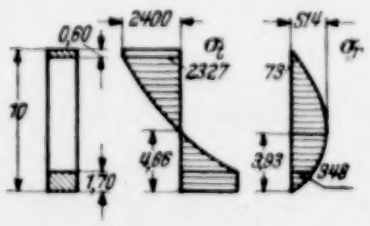

Abb. 16.
$M=480$ kgm. Strenge Lösung.

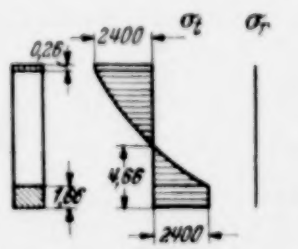

Abb. 17.
$M=480$ kgm. Näherungslösung.

Die Spannungsdiagramme zeigen, daß die Größe der maximalen Radialspannungen je nach der Ausdehnung der plastischen Zone wächst und 31,5 % von σ_s erreichen würde, wenn das ganze Material in den Fließzustand übergehen könnte. Der Verlauf von σ_t unterscheidet sich wenig bei der Näherungslösung und bei der strengen Lösung.

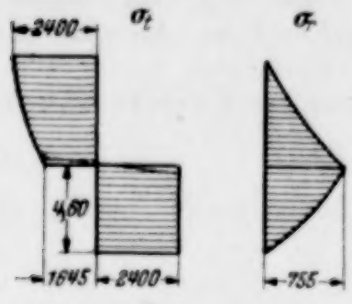

Abb. 18. Strenge Lösung für das Grenzmoment.

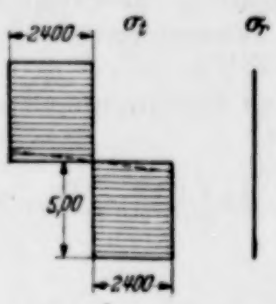

Abb. 19. Näherungslösung für das Grenzmoment.

Ferner ist aus der Tabelle zu ersehen, daß die Momente, die dem Beginn des Fließvorganges bei konkaver Oberfläche entsprechen, ebenfalls sich wenig voneinander unterscheiden. Das Moment, welches die Grenztragfähigkeit des gekrümmten Stabes darstellt, ist bei der strengen Lösung etwas kleiner als bei der Näherungslösung. Der Verlauf der Spannungen unter der Wirkung des Grenzmomentes ist in den Abb. 18 und 19 dargestellt.

Momente (in kg/cm)	Strenge Lösung	Näherungslösung
Fließbeginn	30 800	31 000
Fließbeginn bei konvexer Oberfläche ($\varrho = 11{,}5$ cm)	46 500	—
Grenzmoment	57 100	60 000

Die Unterbrechung der Kontinuität in dem Gesetz der Änderung der tangentiellen Spannungen σ_t, die hierbei auftritt (siehe Abb. 18 und 19), kommt in Wirklichkeit nicht vor. In dem Moment vor der Verfestigung verbleibt im Stab, welcher aus einem Material besteht, das einen langen Fließstiel in der Spannungs-Dehnungs-Linie hat, noch eine dünne elastische Schicht (punktiert angedeutet), deren Einfluß wir nicht berücksichtigen. Innerhalb dieser Schicht geht σ_t ununterbrochen und rasch von positiven über Null zu negativen Werten über.

(Eingegangen am 6. September 1947.)

Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen.

(I. Mitteilung.)

Von **F. Riegels** in Göttingen.

1. Es ist eine bekannte Methode der Theorie der Potentialströmung, das Umströmungsproblem für Körper beliebiger Gestalt durch eine Integralgleichung zu beschreiben und zu lösen. Für einfache Körper wie Kreis und Ellipse, deren Umströmung auch auf andere Weise bekannt ist, macht das keine nennenswerten Schwierigkeiten. Geht man jedoch auf Körper allgemeinerer Gestalt über, so ist die Integralgleichung meist nur numerisch lösbar. Vom Standpunkt der Strömungslehre aus bedeutet diese Methode, daß eine Belegung der Körperoberfläche mit Quellen und Senken bzw. Wirbeln vorgenommen wird, wobei die Verteilung dieser Singularitäten so bestimmt werden muß, daß die Körperkontur Stromfläche wird. Aus dieser Singularitätenverteilung kann sodann die Geschwindigkeit berechnet werden. Wir beschränken uns im folgenden auf ebene Strömungen und betrachten zur x-Achse symmetrische Körper in einer zur x-Achse parallelen Anströmung. In diesem Falle sind nur Quellen und Senken auf der Oberfläche des Körpers nötig. In einer II. Mitteilung werden wir später den allgemeinen Fall mit zur x-Achse nicht mehr symmetrischen Körperformen und mit Schräganblasung behandeln.

2. Die Bestimmung der Quellverteilung auf der Körperoberfläche ist meist sehr mühsam, weil außer der Quelle am betrachteten Ort auch alle übrigen Quellen noch Normalkomponenten liefern. Wir wollen nun zeigen, wie man diese Schwierigkeit umgehen kann und so auf einfache Weise die Geschwindigkeitsverteilung am Körper angeben kann. Dazu betrachten wir die konforme Abbildung des Äußeren des vorgegebenen Körpers $y=y(x)$* in der z-Ebene auf das Äußere eines Schlitzes der x-Achse (z_s-Ebene). Stellen wir uns nun in der z-Ebene eine Parallelströmung V vor, die den vorgegebenen Körper durchdringen möge, so besitzt diese an der Körperoberfläche Normalkomponenten (nach außen positiv!) der Gestalt

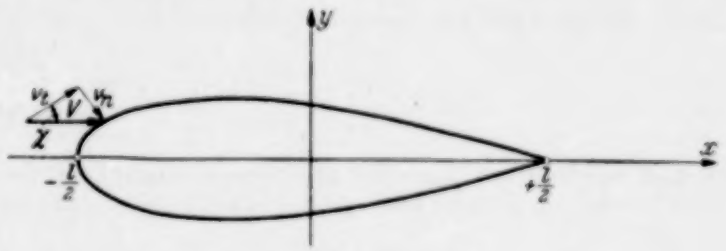

Abb. 1. Bezeichnungen.

$$v_n = -V \sin\chi = -V \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right). \tag{1}$$

(Abb. 1). Beim Übergang in die Schlitzebene z_s geht das Äußere der Kontur über in das Äußere des Schlitzes, die zugehörige Strömung also in eine Strömung, die in den Schlitz hinein- bzw. herausführt; der im Inneren des Körpers befindliche Teil der betrachteten Strömung verschwindet im Schlitz. Die Normalkomponenten gehen bei dieser Transformation über in die Normalkomponenten am Schlitz

$$v_n^{(s)} = v_n \left|\frac{dz}{dz_s}\right|. \tag{2}$$

Sie haben am oberen und unteren Ufer des Schlitzes entgegengesetzt gleiche Werte. In dieser Ebene können wir die Normalkomponenten ohne Schwierigkeit zum Verschwinden bringen, indem wir eine Quellbelegung

$$q(x_s) = -2\, v_n^{(s)} \tag{3}$$

anbringen. Diese Belegung erzeugt eine zusätzliche Tangentialgeschwindigkeit

$$\Delta v_t^{(s)} = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{q(x_s')\, dx_s'}{x_s' - x_s}. \tag{4}$$

Durch Rücktransformation in die ursprüngliche z-Ebene ergibt sich die tangentiale Geschwindigkeitskomponente am Körper zu

$$\Delta v_t = \Delta v_t^{(s)} \left|\frac{dz_s}{dz}\right|. \tag{5}$$

---

* Die Eindeutigkeit dieser Funktion wird vorausgesetzt.

Diese ist zu der dort ohnehin vorhandenen Tangentialkomponente

$$v_t = V \cos \chi = V \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \tag{6}$$

zu addieren, so daß sich insgesamt als Betrag der Geschwindigkeit an der Körperkontur ergibt

$$W = v_t + \Delta v_t \,. \tag{7}$$

Die Schwierigkeit bei dieser Methode liegt darin, daß die Abbildungsfunktion, insbesondere die genaue Zuordnung der Randpunkte nicht bekannt ist. Betrachten wir zunächst einmal die bekannten Verhältnisse bei Ellipsen. Wenn wir in diesem Falle die Schlitzebene derart mit einem konstanten Faktor C multiplizieren, daß die Schlitzlänge gleich der Körperlänge wird, so ist die Randzuordnung von Ellipse und Schlitz gerade so, daß die Punkte des Schlitzes und die jeweiligen Ellipsenpunkte gleiche Abszissen haben. Die Ableitung der Abbildungsfunktion lautet

$$\left|\frac{dz}{dz_s}\right| = \frac{ds}{dx_s} = C \frac{ds}{dx} \,, \tag{8}$$

wenn ds das Bogenelement der Kontur und dx_s das zugehörige Längenelement der x_1-Achse bedeuten. (Dabei ist $C = 1/1+\delta$ für Ellipsen mit dem Dickenverhältnis $\delta = d/l$). Bei beliebigen Körperformen gelten diese Beziehungen nicht mehr. Die Punkte des Schlitzes liegen nicht mehr genau bei den gleichen Abszissen wie die jeweiligen Körperpunkte, sondern etwas daneben, und C ist auch nicht mehr konstant, sondern wird eine Funktion von x. Immerhin kann man auch bei beliebigen Körperformen näherungsweise C noch als konstant annehmen. Damit wird dann aus (2), (3) und (4)

$$v_n^{(s)} = v_n C \frac{ds}{dx} = v_n C \sqrt{1+y'^2} \,, \tag{2a}$$

$$q(x) = 2 C V \frac{dy}{dx} \,, \tag{3a}$$

$$\Delta v_t^{(s)} = C V \frac{1}{\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dy}{dx'} \frac{dx'}{x-x'} \,, \tag{4a}$$

so daß schließlich aus (7) als Geschwindigkeit an der Körperkontur folgt:

$$W = \frac{V}{\sqrt{1+y'^2}} \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dy}{dx'} \frac{dx'}{x-x'}\right). \tag{9}$$

Die Behandlung einfacher Beispiele wie des Kreises und der Ellipse gibt die bekannten exakten Formeln. Aber auch für Körper beliebiger Gestalt liefert diese Methode einfache und trotzdem recht genaue Lösungen. Die praktische Durchführung derartiger Geschwindigkeitsberechnungen gestaltet sich erfahrungsgemäß recht bequem. Im Hinblick auf den folgenden Abschnitt werde die Formel (9) noch etwas weiter ausgewertet. Für beliebige symmetrische Körper $y = y(x)$ (natürlich immer bei eindeutiger Zuordnung der Koordinaten y und x) ist die folgende Parameterdarstellung möglich:

$$\frac{x}{l/2} = \cos \psi \,, \quad \frac{y}{l/2} = \sum_1^\infty c_\nu \sin \nu \psi \,. \tag{10}$$

Damit wird

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dy}{dx'} \frac{dx'}{x-x'} = -\frac{1}{\pi} \frac{2}{l} \int_0^\pi \frac{dy}{d\psi'} \frac{d\psi'}{\cos\psi - \cos\psi'} = \sum_1^\infty \nu c_\nu \frac{\sin \nu \psi}{\sin \psi} \,. \tag{11}$$

also die Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \left(1 + \sum_1^\infty \nu c_\nu \frac{\sin \nu \psi}{\sin \psi}\right). \tag{12}$$

3. Um das Wesen der obigen Vernachlässigung klarer zu erkennen, betrachten wir die exakte konforme Abbildung des Körpers (z-Ebene) auf einen Kreis (ζ-Ebene). Die zugehörige Abbildungsfunktion lautet

$$z = c \left(a + \lambda \frac{\zeta}{r} + \frac{1}{\lambda} \frac{r}{\zeta} + \sum_2^\infty a_\nu \frac{r^\nu}{\zeta^\nu}\right) \tag{13}$$

Die Schreibweise ist dabei so gewählt, daß bei Weglassen der Glieder mit a, a_ν die bekannte

Abbildungsfunktion $z=\zeta+(c^2/\zeta)$ entsteht, die den Kreis vom Halbmesser r in eine Ellipse mit den Halbachsen $r+(c^2/r)$ und $r-(c^2/r)$ bzw. mit $r=c\lambda$ in $c\,[\lambda+(1/\lambda)]$, $c\,[\lambda-(1/\lambda)]$ überführt. Aus (13) folgt durch Zerlegen in Real- und Imaginärteil

$$\frac{x}{c} = a + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \ldots , \tag{14}$$

$$\frac{y}{c} = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\sin\varphi - a_2 \sin 2\varphi - \ldots . \tag{15}$$

Die Geschwindigkeitsverteilung am Körper folgt aus derjenigen am Kreis durch Multiplikation mit $\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = \frac{r\,d\varphi}{ds}$, also

$$W = 2\,V \sin\varphi\ \frac{r\,d\varphi}{ds} = 2\,V\sin\varphi\,\frac{r}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = 2\,V\sin\varphi\ \frac{r}{|\dot{x}|}\,\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\,, \tag{16}$$

wo der Punkt eine Ableitung nach φ, der Strich eine solche nach x bezeichnet. Mit (14) folgt aus der letzten Formel

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\,\frac{2\lambda\sin\varphi}{\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\sin\varphi + 2a_2\sin 2\varphi + \cdots} \tag{17}$$

und nach Kürzen mit $2\lambda\sin\varphi$ und Einführung von $\lambda = 1+\varepsilon$

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} : \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\right) + \frac{1}{2(1+\varepsilon)\sin\varphi}\sum_2^\infty \nu\, a_\nu \sin\nu\varphi\right]. \tag{18}$$

Setzen wir nun voraus, daß es sich um schlanke Körper handeln soll, so wird immer $\varepsilon,\ a_\nu \ll 1$ und damit eine Entwicklung von (18) für geringe Körperdicken möglich sein. Bei Vernachlässigung quadratischer und höherer Glieder ergibt sich

$$\frac{W}{V} \approx \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\left[1+\varepsilon - \frac{1}{2\sin\varphi}\sum_2^\infty \nu\, a_\nu \sin\nu\varphi\right]. \tag{19}$$

Der Vergleich dieser Formel mit (12) und von (14), (15) mit (10) zeigt die Identität der beiden, wenn man setzt

$$\varphi = \psi;\ a = 0,\ \varepsilon = c_1,\ a_\nu = -2c_\nu;\ c = \frac{l}{4}\,. \tag{20}$$

Die entsprechende Entwicklung nach ε bzw. a_ν lautet dann für (14) und (15)

$$\frac{x}{l/_2} = \cos\varphi\,,\ \frac{y}{l/_2} = \varepsilon\sin\varphi + \sum_2^\infty c_\nu \sin\nu\varphi\,. \tag{21}$$

Damit ist aber gezeigt, daß die im vorigen Abschnitt wesentlich benutzte Voraussetzung der Konstanz von C für schlanke Körperformen erlaubt ist.

4. Zum Schluß mögen noch ein bekanntes und ein weniger bekanntes Beispiel behandelt werden: ein *Joukowsky*-Profil und ein Halbkörper mit halbkreisförmigem Kopf. Die Kontur des *Joukowsky*-Profils ist bekanntlich[1] in linearisierter Näherung

$$\frac{x}{l/_2} = \cos\varphi\,,\ \frac{y}{l/_2} = \varepsilon\sin\varphi\,(1-\cos\varphi)\,; \tag{22}$$

die zugehörige Quellbelegung auf der x-Achse lautet

$$q(x) = 2\,V\frac{dy}{dx} = -2\,V\varepsilon\,\frac{\cos\varphi - \cos 2\varphi}{\sin\varphi}\,, \tag{23}$$

und aus (12) folgt als Geschwindigkeitsverteilung bei symmetrischer Anblasung:

$$\frac{W}{V} = \frac{(1+\varepsilon)\sin\varphi - \varepsilon\sin 2\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi + \varepsilon^2(\cos\varphi - \cos 2\varphi)^2}}\,. \tag{24}$$

[1] Vgl. z. B. *H. Glauert*, The Elements of Airofeil and Airscrew Theory. Cambridge 1926.

Abb. 2 gibt einen Vergleich dieser Geschwindigkeitsverteilung mit der bekannten, durch konforme Abbildung gewonnenen.

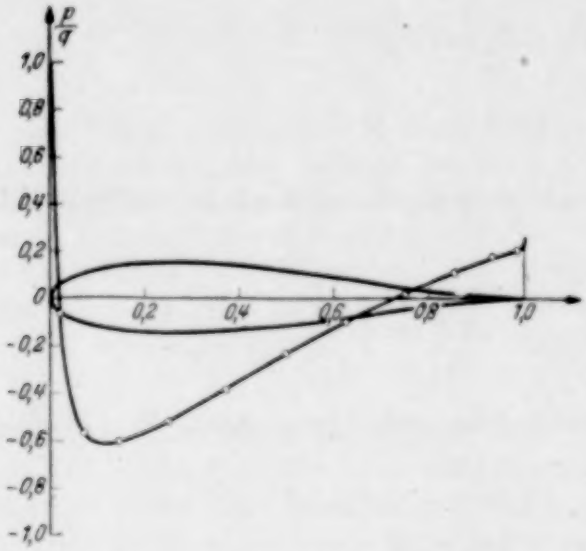

Abb. 2. Druckverteilung $p/q = 1-(W/V)^2$ eines 15% dicken *Joukousky*-profils. Ausgezogen: strenge Lösung, Punkte: Näherungslösung (24).

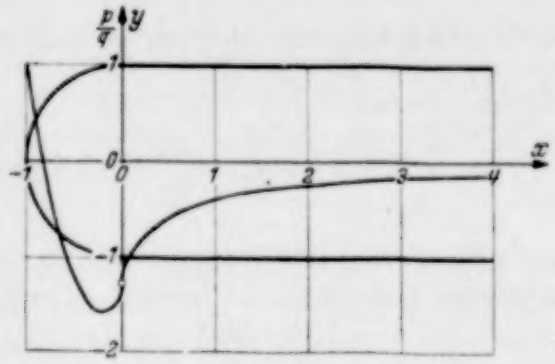

Abb. 3. Druckverteilung eines Halbkörpers mit halbkreisförmigem Kopf.

Im Beispiel des Halbkörpers mit halbkreisförmigem Kopf (Abb. 3) ist $y = \sqrt{1-x^2}$ und $y' = -x/\sqrt{1-x^2}$ für $x < 0$ bzw. $y = 1$, $y' = 0$ für $x > 0$. Die Berechnung mit Hilfe von (9), wobei die Integration von -1 bis 0 zu erstrecken ist, ergibt die Geschwindigkeitsverteilung

$$\left.\begin{aligned} \frac{W}{V} &= \frac{3}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\pi}\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|} \quad \text{für } -1 \leqq x \leqq 0\,, \\ \frac{W}{V} &= \frac{3}{2} - \frac{x}{\pi\sqrt{1-x^2}}\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \text{für } 0 \leqq x \leqq 1\,, \\ \frac{W}{V} &= \frac{3}{2} + \frac{x}{\pi\sqrt{x^2-1}}\left(arc\sin\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}\right) \text{für } 1 \leqq x \leqq \infty\,. \end{aligned}\right\} \qquad 25)$$

Sie liefert, worauf besonders hingewiesen sei, auch die charakteristische, senkrechte Wendetangente an der Stelle $x = 0$, die jede Geschwindigkeitsverteilung an Stellen unstetiger Änderung der Krümmung der Körperkontur aufweist[1]. Sie stimmt ferner numerisch mit einer speziellen Lösung durch konforme Abbildung von *Schmieden*[2] überein.

---

[1] Vgl. *A. Betz*, Luftfahrtforschung 19 (1942) S. 129.

[2] *C. Schmieden*, Jahrb. 1942 d. deutschen Luftfahrtforschung I, S. 106.

(Eingegangen am 7. September 1947.)

Enthalpien, Entropien und Gleichgewichtskonstanten von Verbrennungsgasen.

Von **O. Lutz** in Braunschweig.

1. Einleitung. Im National Bureau of Standards sind in den letzten Jahren thermische und kalorische Zustandswerte von Kohlenwasserstoffen und deren Verbrennungsprodukten kritisch gesichtet und korrigiert bzw. neu errechnet worden[1]. In dem unten angeführten Bericht sind Zustandswerte für O_2, H_2, N_2 und CO bis 5000° K, für CO_2 bis 3500° K, für H_2O bis 3000° K und für C (Graphit) bis 1500° K enthalten, bei den hohen Temperaturen springend von 500° zu 500°. Die entsprechenden Gleichgewichtskonstanten sind bis 1500° K ermittelt.

Als Fortschritt gegenüber den früheren Veröffentlichungen sind in den amerikanischen Neuberechnungen berücksichtigt: die Änderung des Wertes der Gaskonstanten $\Re$ von 1,9869 in 1,98718 kcal/grd, kmol, der Molekulargewichte H und C von 1,0078 und 12,00 in 1,0080 bzw. 12,010, des Wertes hc/k (h = *Planck*sches Elementarquant, c = Lichtgeschwindigkeit, k = *Boltzmann*-Konstante) von 1,43242 in 1,43847 cm grd, ferner Verbesserungen in den Ansätzen für die Translationsentropie und die Rotationsenergie bei CO_2 und H_2O.

Für die Behandlung von Verbrennungsvorgängen sind außer den angegebenen Werten noch die entsprechenden Zustandsgrößen für OH, NO, O und H erforderlich, insbesondere auch die Gleichgewichtskonstanten für höhere Temperaturen. Die vorliegende Zusammenstellung gibt diese Werte bis 4000° K, von 100° zu 100° springend. Die Werte sind teils durch vorsichtig geglättete Interpolation der neuen amerikanischen Werte, durch entsprechend vorgenommene Extrapolation (bei H_2O und CO_2) und Vergleich mit anderen Veröffentlichungen (und privaten Informationen[2]) und schließlich durch eigene Korrektur der früher veröffentlichten amerikanischen Werte (bei OH, NO, O und H) gewonnen. Die Gleichgewichtskonstanten sind neu errechnet.

2. Einheiten und Konstanten. In dem amerikanischen Bericht ist eine Zusammenstellung der wichtigsten Konstanten gegeben, die den Berechnungen zugrunde gelegt sind; da diese über den Rahmen der hier wiedergegebenen Enthalpien und Entropien hinaus von Interesse sind, gibt Tabelle 1 einen Auszug, ergänzt durch das mechanische Wärmeäquivalent und die Gaskonstante im technischen Maßsystem.

Tabelle 1. *Werte der Konstanten.*

1 Liter	$= 1000{,}028 \pm 0{,}004$ cm³,
1 Atm	$= 1013250$ dyn/cm² $= 1033227$ kg/cm²,
1 int. Joule (NBS)	$= 1{,}00017 \pm 0{,}00005$ abs. Joule,
1 cal	$= 4{,}1833$ int. Joule (NBS),
	$= 4{,}18401 \pm 0{,}00021$ abs. Joule,
1 kcal	$= 426{,}651 \pm 0{,}022$ mkg $= 1/860{,}565$ int. kWh,
$(RT)_{0°\,C}$	$= 2271{,}16 \pm 0{,}04$ abs. Joule/mol
	$= 22414{,}6 \pm 0{,}4$ cm³ Atm/mol,
$T_{0°\,C}$	$= 273{,}160 \pm 0{,}010°$ K,
R	$= 8{,}31439 \pm 0{,}00034$ abs. Joule/grd,mol
	$= 1{,}98718 \pm 0{,}00013$ cal/grd,mol
	$= 82{,}0567 \pm 0{,}0034$ cm³ Atm/grd,mol
	$= 847{,}832 \pm 0{,}035$ mkg/grd,kmol,
N	$= (6{,}02283 \pm 0{,}0022)\ 10^{23}$/mol,
k	$= \Re/N = (1{,}38048 \pm 0{,}00050)\ 10^{-16}$ erg/grd,
h	$= (6{,}6242 \pm 0{,}0044)\ 10^{-27}$ erg sec,
c	$= (2{,}99776 \pm 0{,}00008)\ 10^{10}$ cm/sec,
$\frac{hc}{k}$	$= 1{,}43847 \pm 0{,}00045$ cm grd.

3. Zustandswerte. Tabelle 2 enthält die neuen Enthalpiewerte; wo die Werte nicht nur interpoliert sind, zeigen die Anmerkungen, wie sie gewonnen sind.

[1] *Donald D. Wagman, John E. Kilpatrick, William J. Taylor, Kenneth S. Pitzer* and *Frederick D. Rossini*, Heats, free energies and equilibrium constants of some reactions involving O_2, H_2, H_2O, C, CO, CO_2 and CH_4. NBS/RP 1634, Februar 1945.

[2] Insbesondere von Dr. *H. Pike* in London.

Tabelle 2. *Enthalpiewerte [cal/mol oder kcal/kmol].*

T°K	O_2 [1]	H_2 [1]	H_2O [1]	N_2 [1]	C (fest) [1] Graphit	C (fest) [1] Diamant	CO [1]	CO_2 [1]	NO [3]	OH [3]	H [4]	O [5]
273,16	1895	1852	2164	1898	202	115	1899	2030	2019	1929	1357	1475
298,16	2070	2024	2365	2072	252	128	2073	2238	2193	2106	1481	1608
300	2083	2037	2380	2085	255	131	2085	2255	2207	2119	1490	1617
400	2792	2731	3190	2782	503	325	2784	3195	2920	2829	1987	2135
500	3524	3430	4020	3485	821	602	3490	4223	3643	3536	2484	2646
600	4279	4129	4873	4198	1198	950	4210	5322	4380	4241	2981	3152
700	5057	4832	5755	4925	1622	1355	4946	6481	5134	4948	3478	3655
800	5854	5537	6666	5669	2082	1804	5700	7689	5908	5661	3974	4157
900	6670	6248	7607	6428	2569	2284	6471	8940	6700	6380	4471	4658
1000	7497	6966	8580	7203	3075	2782	7257	10222	7508	7107	4968	5159
1100	8335	7692	9580	7992	3596	3289	8056	11536	8327	7844	5465	5658
1200	9184	8428	10613	8793	4130	3802	8868	12872	9157	8593	5962	6157
1300	10041	9173	11675	9605	4680		9690	14234	9995	9354	6458	6656
1400	10905	9929	12762	10425	5242		10521	15611	10841	10127	6955	7155
1500	11776	10694	13876	11254	5814		11359	17004	11693	10910	7452	7653
1600	12653	11470	15014	12090			12203	18411	12551	11703	7949	8151
1700	13536	12256	16173	12933			13054	19829	13415	12505	8446	8649
1800	14425	13052	17351	13783			13910	21257	14283	13316	8942	9147
1900	15319	13858	18547	14639			14771	22696	15155	14135	9439	9645
2000	16219	14672	19760	15499			15636	24144	16030	14962	9936	10143
2100	17125	15493	20992	16362			16505	25600	16908	15796	10433	10641
2200	18036	16322	22238	17228			17377	27062	17790	16637	10929	11139
2300	18952	17158	23497	18096			18251	28530	18674	17484	11426	11637
2400	19873	18001	24769	18966			19128	30003	19561	18337	11923	12135
2500	20799	18851	26053	19839			20007	31480	20450	19195	12420	12633
2600	21730	19707	27347	20715			20889	32962	21340	20057	12917	13132
2700	22666	20569	28650	21593			21773	34450	22232	20924	13413	13631
2800	23606	21436	29962	22474			22659	35944	23126	21796	13910	14130
2900	24551	22308	31281	23358			23546	37444	24022	22673	14407	14629
3000	25500	23186	32607	24245			24434	38950	24918	23555	14904	15129
3100	26453	24068	33940 [2]	25133			25324	40460	25816	24442	15401	15630
3200	27410	24954	35278	26022			26215	41972	26716	25333	15897	16132
3300	28372	25845	36621	26912			27108	43486	27618	26228	16394	16635
3400	29338	26739	37969	27803			28003	45002	28521	27126	16891	17140
3500	30308	27637	39321	28695			28900	46520	29425	28027	17388	17646
3600	31282	28538	40676	29589			29798	48041 [2]	30331	28931	17885	18152
3700	32260	29442	42035	30485			30697	49565	31238	29838	18381	18658
3800	33241	30348	43397	31382			31596	51093	32146	30748	18878	19164
3900	34226	31257	44762	32280			32495	52624	33056	31661	19375	19670
4000	35215	32168	46129	33178			33395	54159	33967	32576	19872	20176

[1] Aus RP 1634, Bureau of Standards, Februar 1945, interpoliert und geglättet.
[2] Aus dem Vergleich der Extrapolation RP 1634 mit den Werten von *Pike*.
[3] Aus dem Vergleich der Werte von *Pike* mit den früheren amerikanischen Werten bis 4000° K; geglättete und im Sinne von RP 1634 korrigierte Werte.
[4] Mit $\mathfrak{C}_p = 4{,}967_{95}$.
[5] Aus den früheren amerikanischen Werten; korrigiert im Sinne von RP 1634.

Die Glättung der inter- und extrapolierten Werte außerhalb der gegebenen Werte ist über die zweiten Differenzen erfolgt, wobei die Verknüpfung

$$\Delta \mathfrak{Z} = T_m \Delta \mathfrak{S}$$

mit den ebenso behandelten Entropien eine weitere Kontrolle und Verbesserung ermöglichte.

Die absoluten Entropien (Tabelle 3) sind für technische Rechnungen auf 1 at = 1 kg/cm², nicht auf 1 Atm bezogen; es gilt für die Umrechnung

$$\mathfrak{S}_{1\ \mathrm{Atm}} = \mathfrak{S}_{1\ \mathrm{at}} - \mathfrak{R} \ln 1{,}03323\,,$$

also

$$\mathfrak{S}_{1\ \mathrm{Atm}} = \mathfrak{S}_{1\ \mathrm{at}} - 0{,}065 \text{ [cal/grd, mol oder kcal/grd, kmol]}\,.$$

4. Reaktionswärmen. Zur Berechnung der Gleichgewichtskonstanten müssen die Reaktionswärmen am absoluten Nullpunkt bekannt sein. In Tabelle 4 sind die Reaktionswärmen zusammengestellt, ergänzt durch die Werte bei 25° C. Die genauen Werte entstammen wieder dem NBS-Report, für die übrigen sind die nach den sonst vorliegenden Veröffentlichungen (vgl. Anhang) am zutreffendsten scheinenden Werte ausgewählt.

Tabelle 3. *Absolute Entropien (für 1 at = 1 kg/cm²) [cal/grd, mol oder kcal/grd, kmol].*

T°K	O_2	H_2	H_2O	N_2	CO	CO_2	NO [3]	OH [3]	H [3]	O [3]
298,16	49,068	31,276	45,171	45,832	47,366	51,126	50,400	43,951	27,456	38,528
300	49,113	31,318	45,219	45,874	47,407	51,181	50,542	43,994	27,486	38,562
400	51,158	33,315	47,548	47,883	49,417	53,880	52,496	46,041	28,915	40,051
500	52,788	34,874	49,399	49,450	50,992	56,178	54,109	47,616	30,024	41,191
600	54,165	36,149	50,955	50,750	52,303	58,174	55,454	48,902	30,929	42,115
700	55,361	37,232	52,313	51,870	53,438	59,960	56,617	49,989	31,694	42,891
800	56,427	38,173	53,529	52,862	54,444	61,572	57,651	50,939	32,357	43,561
900	57,387	39,011	54,637	53,757	55,352	63,045	58,584	51,786	32,943	44,151
1000	58,259	39,769	55,663	54,574	56,181	64,396	59,433	52,552	33,466	44,677
1100	59,057	40,460	56,616	55,324	56,943	65,648	60,213	53,254	33,939	45,152
1200	59,795	41,100	57,514	56,020	57,651	66,811	60,934	53,906	34,371	45,586
1300	60,484	41,697	58,364	56,671	58,308	67,901	61,604	54,514	34,768	45,985
1400	61,126	42,255	59,170	57,280	58,925	68,922	62,232	55,087	35,136	46,355
1500	61,724	42,785	59,938	57,851	59,501	69,882	62,819	55,628	35,479	46,699
1600	62,289	43,285	60,673	58,391	60,046	70,788	63,373	56,140	35,800	47,020
1700	62,824	43,761	61,377	58,903	60,562	71,647	63,896	56,626	36,101	47,322
1800	63,332	44,216	62,052	59,389	61,052	72,463	64,392	57,089	36,385	47,607
1900	63,815	44,652	62,700	59,852	61,518	73,241	64,864	57,531	36,654	47,876
2000	64,277	45,070	63,325	60,293	61,961	73,985	65,313	57,954	36,909	48,131
2100	64,719	45,470	63,927	60,714	62,384	74,695	65,741	58,361	37,151	48,374
2200	65,143	45,856	64,507	61,116	62,789	75,375	66,151	58,752	37,382	48,605
2300	65,548	46,227	65,068	61,502	63,178	76,027	66,544	59,128	37,603	48,826
2400	65,939	46,586	65,610	61,872	63,551	76,654	66,922	59,491	37,814	49,038
2500	66,315	46,933	66,135	62,228	63,910	77,256	67,285	59,841	38,017	49,242
2600	66,680	47,269	66,642	62,572	64,256	77,838	67,634	60,180	38,212	49,438
2700	67,034	47,595	67,134	62,904	64,590	78,400	67,971	60,508	38,400	49,626
2800	67,377	47,911	67,611	63,224	64,912	78,944	68,296	60,825	38,581	49,808
2900	67,709	48,216	68,072	63,534	65,223	79,471	68,611	61,134	38,755	49,983
3000	68,033	48,513	68,521 [2]	63,835	65,524	79,982 [1]	68,915	61,434	38,923	50,152
3100	68,345	48,801	68,958	64,126	65,816	80,477	69,210	61,724	39,086	50,316
3200	68,648	49,082	69,383	64,408	66,099	80,958	69,495	62,007	39,244	50,475
3300	68,944	49,356	69,796	64,682	66,373	81,425	69,772	62,282	39,397	50,629
3400	69,232	49,623	70,198	64,948	66,640	81,878	70,041	62,550	39,545	50,780
3500	69,523	49,883	70,590	65,206	66,900	82,319 [1]	70,303	62,811	39,689	50,926
3600	69,796	50,138	70,972	65,458	67,153	82,748 [2]	70,558	63,066	39,829	51,069
3700	70,063	50,386	71,346	65,703	67,399	83,166	70,808	63,315	39,965	51,208
3800	70,323	50,628	71,710	65,942	67,639	83,574	71,051	63,558	40,097	51,343
3900	70,578	50,864	72,065	66,175	67,873	83,972	71,288	63,796	40,226	51,475
4000	70,827	51,095	72,412	66,403	68,102	84,361	71,519	64,028	40,352	51,603

T° K	C (fest)	
	Graphit	Diamant
298,16	1,3609	0,5829
300	1,3737	0,5918
400	2,081	1,14
500	2,788	1,76
600	3,474	2,39
700	4,127	3,01
800	4,740	3,61
900	5,314	4,18
1000	5,846	4,70
1100	6,342	5,18
1200	6,807	5,63
1300	7,247	—
1400	7,663	—
1500	8,057	—

[1] Geändert gegen *Rossini*.
[2] Aus den Enthalpiewerten errechnet.
[3] Aus den früheren amerikanischen Werten; korrigiert im Sinne von RP 1634, Bureau of Standards, February 1945; geglättet und mit den Enthalpiewerten geglichen.

Tabelle 4. *Reaktionswärmen.*

	0° K	298,16° K
$C + O_2 \rightleftarrows CO_2$	−93 969[1]	−94 052
$C + \frac{1}{2} O_2 \rightleftarrows CO$	−27 202[1]	−26 416
$CO + \frac{1}{2} O_2 \rightleftarrows CO_2$	−66 767	−67 636
C (Graphit) $\rightleftarrows$ C (Diamant)	+ 557[1]	+ 453
$H_2 + \frac{1}{2} O_2 \rightleftarrows H_2O$	−57 104[1]	−57 798
$\frac{1}{2} O_2 + OH \rightleftarrows H_2O$	−66 900[2]	−67 653
$\frac{1}{2} H_2 \rightleftarrows H$	+51 240[3]	+51 709
$\frac{1}{2} O_2 \rightleftarrows O$	+58 530[4]	+59 103
$\frac{1}{2} N_2 + \frac{1}{2} O_2 \rightleftarrows NO$	+21 500[4]	+21 622

[1] Nach NBS/RP 1634.
[2] Nach *Dwyer*, Journ. Chem. Physics. 12 (1944). S. 351.
[3] Nach *Beutler* für ¾ ortho- und ¼ para-H_2.
[4] Aus dem Taschenbuch für Chemiker und Physiker. Berlin 1943.

5. Gleichgewichtskonstanten K_p. Aus den Daten der Tabellen 2 bis 4 sind die Gleichgewichtskonstanten K_p berechnet, und zwar ebenfalls im Hinblick auf technische Rechnungen für 1 at = 1 kg/cm², nicht 1 Atm. Die Bezeichnung bzw. Definition der Konstanten ist so gewählt, daß die Elemente im Normalzustand den Nenner der Konstanten, das Reaktionsprodukt den Zähler bildet, also z. B.

$$\text{für } H_2 + {}^1/_2 O_2 \rightleftarrows H_2O\text{:}\quad K_{H_2O} = \frac{p_{H_2O}}{p_{H_2}\sqrt{p_{O_2}}},$$

$$\text{für } {}^1/_2 O_2 \rightleftarrows O\text{:}\quad K_O = \frac{p_O}{\sqrt{p_{O_2}}}.$$

(Der Index p für die Konstante ist zur Vereinfachung weggelassen; alle Konstanten gelten für konstanten Druck.)

Für die heterogenen Reaktionen $C + O_2 \rightleftarrows CO_2$ und $C + {}^1/_2 O_2 \rightleftarrows CO$ (C als Graphit angenommen) ist

$$K_{CO_2} = \frac{p_{CO_2}}{p_{O_2}} \text{ und } K_{CO} = \frac{p_{CO}}{\sqrt{p_{O_2}}}$$

(der feste Kohlenstoff bringt keinen Beitrag zu dem Gasdruckglied); die homogene Reaktion $CO + {}^1/_2 O_2 \rightleftarrows CO_2$ schließlich ist sinngemäß durch

$$K^{CO_2}_{CO} = \frac{p_{CO_2}}{p_{CO}\sqrt{p_{O_2}}} = \frac{K_{CO_2}}{K_{CO}}$$

gekennzeichnet.

Tabelle 5. *Gleichgewichtskonstante K_p (für konstanten Druck) im technischen Maßsystem (1 at = 1 kg/cm²).*

T°K	H_2O	CH	O	H	NO	CO_2	CO	$\frac{CO_2}{CO}$
298,16	$1{,}097 \cdot 10^{40}$	$4{,}002 \cdot 10^{-7}$	$5{,}452 \cdot 10^{-41}$	$4{,}867 \cdot 10^{-36}$	$6{,}253 \cdot 10^{-16}$	$1{,}234 \cdot 10^{69}$	$1{,}135 \cdot 10^{24}$	$1{,}087 \cdot 10^{45}$
300	$6{,}024 \cdot 10^{39}$	$4{,}430 \cdot 10^{-7}$	$5{,}543 \cdot 10^{-41}$	$8{,}190 \cdot 10^{-36}$	$8{,}203 \cdot 10^{-16}$	$4{,}647 \cdot 10^{68}$	$8{,}630 \cdot 10^{23}$	$5{,}389 \cdot 10^{44}$
400	$1{,}707 \cdot 10^{29}$	$2{,}769 \cdot 10^{-5}$	$6{,}027 \cdot 10^{-30}$	$2{,}204 \cdot 10^{-26}$	$6{,}771 \cdot 10^{-12}$	$3{,}439 \cdot 10^{51}$	$1{,}361 \cdot 10^{19}$	$2{,}526 \cdot 10^{32}$
500	$7{,}556 \cdot 10^{22}$	$3{,}308 \cdot 10^{-4}$	$1{,}838 \cdot 10^{-23}$	$1{,}042 \cdot 10^{-20}$	$1{,}568 \cdot 10^{-9}$	$1{,}811 \cdot 10^{41}$	$1{,}820 \cdot 10^{16}$	$9{,}953 \cdot 10^{24}$
600	$4{,}223 \cdot 10^{8}$	$1{,}765 \cdot 10^{-3}$	$3{,}951 \cdot 10^{-19}$	$6{,}473 \cdot 10^{-17}$	$5{,}912 \cdot 10^{-8}$	$2{,}521 \cdot 10^{34}$	$2{,}2\,8 \cdot 10^{14}$	$1{,}144 \cdot 10^{20}$
700	$3{,}768 \cdot 10^{15}$	$5{,}589 \cdot 10^{-3}$	$4{,}993 \cdot 10^{-16}$	$3{,}377 \cdot 10^{-14}$	$7{,}917 \cdot 10^{-7}$	$3{,}187 \cdot 10^{29}$	$9{,}376 \cdot 10^{12}$	$3{,}394 \cdot 10^{16}$
800	$1{,}910 \cdot 10^{13}$	$1{,}345 \cdot 10^{-2}$	$1{,}068 \cdot 10^{-13}$	$3{,}740 \cdot 10^{-12}$	$5{,}541 \cdot 10^{-6}$	$6{,}710 \cdot 10^{25}$	$8{,}690 \cdot 10^{11}$	$7{,}718 \cdot 10^{13}$
900	$3{,}095 \cdot 10^{11}$	$2{,}656 \cdot 10^{-2}$	$6{,}983 \cdot 10^{-12}$	$1{,}469 \cdot 10^{-10}$	$2{,}516 \cdot 10^{-5}$	$9{,}250 \cdot 10^{22}$	$1{,}355 \cdot 10^{11}$	$6{,}819 \cdot 10^{11}$
1000	$1{,}132 \cdot 10^{10}$	$4{,}566 \cdot 10^{-2}$	$1{,}986 \cdot 10^{-10}$	$2{,}788 \cdot 10^{-9}$	$8{,}432 \cdot 10^{-5}$	$4{,}754 \cdot 10^{20}$	$3{,}055 \cdot 10^{10}$	$1{,}556 \cdot 10^{10}$
1100	$7{,}514 \cdot 10^{8}$	$7{,}099 \cdot 10^{-2}$	$3{,}087 \cdot 10^{-9}$	$3{,}125 \cdot 10^{-8}$	$2{,}272 \cdot 10^{-4}$	$6{,}347 \cdot 10^{18}$	$8{,}954 \cdot 10^{9}$	$7{,}092 \cdot 10^{8}$
1200	$7{,}792 \cdot 10^{7}$	$1{,}025 \cdot 10^{-1}$	$3{,}048 \cdot 10^{-8}$	$2{,}346 \cdot 10^{-7}$	$5{,}188 \cdot 10^{-4}$	$1{,}738 \cdot 10^{17}$	$3{,}206 \cdot 10^{9}$	$5{,}247 \cdot 10^{7}$
1300	$1{,}139 \cdot 10^{7}$	$1{,}393 \cdot 10^{-1}$	$2{,}120 \cdot 10^{-7}$	$1{,}299 \cdot 10^{-6}$	$1{,}043 \cdot 10^{-3}$	$8{,}233 \cdot 10^{15}$	$1{,}333 \cdot 10^{9}$	$6{,}181 \cdot 10^{6}$
1400	$2{,}190 \cdot 10^{6}$	$1{,}812 \cdot 10^{-1}$	$1{,}118 \cdot 10^{-6}$	$5{,}391 \cdot 10^{-6}$	$1{,}897 \cdot 10^{-3}$	$5{,}590 \cdot 10^{14}$	$5{,}794 \cdot 10^{8}$	$9{,}652 \cdot 10^{5}$
1500	$5{,}226 \cdot 10^{5}$	$2{,}279 \cdot 10^{-1}$	$4{,}755 \cdot 10^{-6}$	$2{,}029 \cdot 10^{-5}$	$3{,}195 \cdot 10^{-3}$	$5{,}833 \cdot 10^{13}$	$3{,}020 \cdot 10^{8}$	$1{,}933 \cdot 10^{5}$
1600	$1{,}491 \cdot 10^{5}$	$2{,}777 \cdot 10^{-1}$	$1{,}681 \cdot 10^{-5}$	$6{,}203 \cdot 10^{-5}$	$5{,}028 \cdot 10^{-3}$			$4{,}751 \cdot 10^{4}$
1700	$4{,}928 \cdot 10^{4}$	$3{,}309 \cdot 10^{-1}$	$5{,}143 \cdot 10^{-5}$	$1{,}011 \cdot 10^{-4}$	$7{,}511 \cdot 10^{-3}$			$1{,}378 \cdot 10^{4}$
1800	$1{,}838 \cdot 10^{4}$	$3{,}856 \cdot 10^{-1}$	$1{,}386 \cdot 10^{-4}$	$4{,}027 \cdot 10^{-4}$	$1{,}072 \cdot 10^{-2}$			$4.612 \cdot 10^{3}$
1900	$7{,}603 \cdot 10^{3}$	$4{,}425 \cdot 10^{-1}$	$3{,}383 \cdot 10^{-4}$	$8{,}889 \cdot 10^{-4}$	$1{,}476 \cdot 10^{-2}$			$1{,}730 \cdot 10^{3}$
2000	$3{,}436 \cdot 10^{3}$	$5{,}002 \cdot 10^{-1}$	$7{,}535 \cdot 10^{-4}$	$1{,}812 \cdot 10^{-3}$	$1{,}971 \cdot 10^{-2}$			$7{,}180 \cdot 10^{2}$
2100	$1{,}672 \cdot 10^{3}$	$5{,}595 \cdot 10^{-1}$	$1{,}557 \cdot 10^{-3}$	$3{,}454 \cdot 10^{-3}$	$2{,}548 \cdot 10^{-2}$			$3{,}248 \cdot 10^{2}$
2200	$8{,}682 \cdot 10^{2}$	$6{,}192 \cdot 10^{-1}$	$3{,}024 \cdot 10^{-3}$	$6{,}227 \cdot 10^{-3}$	$3{,}230 \cdot 10^{-2}$			$1{,}577 \cdot 10^{2}$
2300	$4{,}777 \cdot 10^{2}$	$6{,}786 \cdot 10^{-1}$	$5{,}506 \cdot 10^{-3}$	$1{,}064 \cdot 10^{-2}$	$4{,}004 \cdot 10^{-2}$			$8{,}196 \cdot 10^{1}$
2400	$2{,}760 \cdot 10^{2}$	$7{,}369 \cdot 10^{-1}$	$9{,}575 \cdot 10^{-3}$	$1{,}742 \cdot 10^{-2}$	$4{,}878 \cdot 10^{-2}$			$4{,}498 \cdot 10^{1}$
2500	$1{,}666 \cdot 10^{2}$	$7{,}976 \cdot 10^{-1}$	$1{,}597 \cdot 10^{-2}$	$2{,}747 \cdot 10^{-2}$	$5{,}856 \cdot 10^{-2}$			$2{,}588 \cdot 10^{1}$
2600	$1{,}044 \cdot 10^{2}$	$8{,}569 \cdot 10^{-1}$	$2{,}559 \cdot 10^{-2}$	$4{,}182 \cdot 10^{-2}$	$6{,}924 \cdot 10^{-2}$			$1{,}557 \cdot 10^{1}$
2700	$6{,}770 \cdot 10$	$9{,}141 \cdot 10^{-1}$	$3{,}949 \cdot 10^{-2}$	$6{,}166 \cdot 10^{-2}$	$8{,}077 \cdot 10^{-2}$			9,748
2800	$4{,}485 \cdot 10$	$9{,}712 \cdot 10^{-1}$	$5{,}948 \cdot 10^{-2}$	$8{,}879 \cdot 10^{-2}$	$9{,}337 \cdot 10^{-2}$			6,299
2900	$3{,}109 \cdot 10$	1,028	$8{,}649 \cdot 10^{-2}$	$1{,}244 \cdot 10^{-1}$	$1{,}067 \cdot 10^{-1}$			4,207
3000	$2{,}192 \cdot 10$	1,078	$1{,}228 \cdot 10^{-1}$	$1{,}703 \cdot 10^{-1}$	$1{,}208 \cdot 10^{-1}$			2,888
3100	$1{,}583 \cdot 10$	1,137	$1{,}707 \cdot 10^{-1}$	$2{,}288 \cdot 10^{-1}$	$1{,}357 \cdot 10^{-1}$			2,035
3200	$1{,}165 \cdot 10$	1,191	$2{,}327 \cdot 10^{-1}$	$3{,}022 \cdot 10^{-1}$	$1{,}514 \cdot 10^{-1}$			1,464
3300	8,724	1,242	$3{,}112 \cdot 10^{-1}$	$3{,}935 \cdot 10^{-1}$	$1{,}678 \cdot 10^{-1}$			1,077
3400	6,654	1,294	$4{,}091 \cdot 10^{-1}$	$5{,}014 \cdot 10^{-1}$	$1{,}846 \cdot 10^{-1}$			0,8066
3500	5,138	1,339	$5{,}279 \cdot 10^{-1}$	$6{,}321 \cdot 10^{-1}$	$2{,}017 \cdot 10^{-1}$			0,6130
3600	4,033	1,386	$6{,}730 \cdot 10^{-1}$	$7{,}856 \cdot 10^{-1}$	$2{,}195 \cdot 10^{-1}$			0,4753
3700	3,211	1,433	$8{,}479 \cdot 10^{-1}$	$9{,}664 \cdot 10^{-1}$	$2{,}382 \cdot 10^{-1}$			0,3733
3800	2,586	1,480	1,055	1,175	$2{,}572 \cdot 10^{-1}$			0,2972
3900	2,105	1,527	1,301	1,420	$2{,}771 \cdot 10^{-1}$			0,2390
4000	1,732	1,571	1,584	1,694	$2{,}968 \cdot 10^{-1}$			0,1947

Alle Konstanten, bis auf die druckunabhängigen K_{OH} und K_{NO} sind von der Dimension $at^{1/2}$ oder $at^{-1/2}$; um diese in die Dimension Atm zu überführen, ist entsprechend mit $\sqrt{1{,}03323} = 1{,}01648$ zu multiplizieren oder zu dividieren, K_{OH} und K_{NO} bleiben unverändert.

Tabelle 5 gibt die berechneten Werte.

6. Literaturübersicht. Die bei den amerikanischen Berechnungen benützten Literaturstellen sind nachstehend durch neuere deutsche und englische ergänzt[1], womit die Übersicht ein vielleicht wertvolles und einigermaßen vollständiges Bild über das Fachgebiet gibt.

1. *d'Ans* u. *Lax*, Taschenbuch für Chemiker und Physiker, 1942.
2. *Avramenko* u. *Kondratjew*, Acts Physicochimica, Moskva 7 (1937).
3. *G. P. Baxter, M. Guichard, O. Hönigschmid* and *R. Whytlaw-Gray*, J. Am. Chem. Soc. 63 (1941) S. 845.
4. *Becker*, Handbuch der experiment. Physik, Bd. 13 (1929).
5. *A. Bettendorf* and *A. Wüllner*, Ann. Physik 2 (1868) S. 133, 293.
6. *Beutler*, Z. Phys. Chemie 27 (1934) S. 287.
7. *Beutler*, Z. Phys. Chemie 29 (1935) S. 315.
8. *R. T. Birge*, Rev. Modern Phys. 1 (1929) S. 1.
9. *R. T. Birge*, Rev. Modern Phys. 13 (1941) S. 233.
10. *Bonhoeffer* u. *Reichardt*, Z. Phys. Ch m. 139 (1928) S. 75.
11. *Born*, Z. Techn. Phys. 7 (1926) S. 240.
12. *G. K. Burgeas*, BS J. Research 1 (1928) S. 635, RP 22.
13. *J. O. Clayton* and *W. F. Giauque*, J. Am. Chem. Soc. 55 (1933) S. 5071.
14. *C. S. Cragoe*, J. Research NBS 26 (1941) S. 495, RP 1393.
15. *E. C. Crittenden*, National Bureau of Standards (1943), Private communication; *H. L. Curtis*, J. Research NBS 33 (1944) S. 235, RP 1606.
16. *Cross* and *van Vleck*, J. Chem. Phys. 1 (1933) S. 350.
17. *Damköhler* u. *Edse*, Naturwissensch. 1943, S. 310.
18. *C. O. Davis* and *H. L. Johnston*, J. Am. Chem. Soc. 56 (1934) S. 1045.
19. *P. H. Dewey* and *D. R. Harper*, 3d. J. Research NBS 21 (1938) S. 457, RP 1139.
20. *Dwyer*, Phys. Rev. (2) 59 (1941) S. 928.
21. *Dwyer* u. *Oldenb rg*, J. Chem. Phys. 12 (1944) S. 351.
22. *Eggert*, Phys. Zeitschr. 20 (1919) S. 570.
23. *Fajans*, Z. Elch. 31 (1925) S. 63.
24. *Fenning* u. *Whiffin*, Phys. Trans. Roy. Soc. London (A) 238 (1939) S. 149.
25. *W. F. Giau ue*, J. Am. Chem. Soc. 52 (1930) S. 4816.
26. *W. F. Giau ue* and *J. O. Clayton*, J. Am. Chem. Soc. 55 (1933) S. 4875.
27. *Gibson* u. *Heitler*, Z. Phys. 49 (1928) S. 465.
28. *A. R. Gordon* and *C. Barnes*, J. Chem. Phys. 36 (1932) S. 1143.
29. *A. R. Gordon* and *C. Barnes*, J. Chem. Phys. 1 (1933) S. 297.
30. *A. R. Gordon*, J. Chem. Phys. 1 (1933) S. 308.
31. *A. R. Gordon*, J. Chem. Phys. 2 (1934) S. 65.
32. *A. R. Gordon*, J. Chem. Phys. 2 (1934) S. 549.
33. *A. R. Gordon*, J. Chem. Phys. 3 (1935) S. 336.
34. *A. R. Gordon*, J. Chem. Phys. 6 (1936) S. 678.
35. *Haber*, Z. angew. Chem. 42 (1929) S. 745.
36. *Herzberg* u. *Sponer*, Z. Phys. Chem. 26 (1934) S. 1.
37. *Herzberg*, Molekülspektren und Molekülstruktur I (1939).
38. *C. J. Jacobs* and *G. S. Parks*, J. Am. Chem. Soc. 56 (1934) S. 1513.
39. *R. S. Jessup* and *C. B. Green*, J. Research NBS 13 (1934) S. 469, RP 721.
40. *R. S. Jessup*, J. Research NBS 18 (1937) S. 115, RP 966.
41. *R. S. Jessup*, J. Research NBS 21 (1938) S. 491, RP 1140.
42. *R. S. Jessup*, J. Research NBS 29 (1942) S. 247, RP 1499.
43. *H. L. Johnston* and *M. K. Walker*, J. Am. Chem. Soc. 55 (1933) S. 172.
44. *H. L. Johnston* and *M. K. Walker*, J. Am. Chem. Soc. 57 (1935) S. 682.
45. *H. L. Johnston* and *C. O. Davis*, J. Am. Chem. Soc. 56 (1934) S. 271.
46. *Justi*, Spez. Wärme, Enthalpie, Entropie und Dissoziation techn. Gase. Berlin 1938.
47. *Justi*, Gleichgewichtskonstanten, in *d'Ans* u. *Lax*, Taschenbuch für Chemiker und Physiker.
48. *L. S. Kassel*, J. Chem. Phys. 1 (1933) S. 576.
49. *L. S. Kassel*, ref. *Zeise*, Z. Elch. 39 (1933) S. 758.
50. *L. S. Kassel*, J. Am. Chem. Soc. 56 (1934) S. 1838.
51. *L. S. Kassel*, Chem. Rev. 18 (1936) S. 277.
52. *J. W. Knowlton* and *F. D. Rossini*, J. Research NBS 22 (1939) S. 415, RP 1193.
53. *Kohn*, Z. Phys. 27 (1924) S. 305.
54. *Landolt-Börnstein*, Physikal. Chem. Tabellen.
55. *G. N. Lewis* u. *v. Elbe*, J. Am. Chem. Soc. 57 (1935) S. 612.
56. *G. N. Lewis* u. *v. Elbe*, J. Chem. Phys. 3 (1935) S. 63.
57. *G. N. Lewis* u. *M. Randall*, Thermodynamics, p. 294 (Mc Graw-Hill Cook Co. Inc., 1923).
58. *W. F. Libby*, J. Chem. Phys. 11 (1943) S. 101.

[1] Bei der Zusammenstellung war eine Ausarbeitung von Dipl.-Ing. *N. Luft* eine wertvolle Hilfe.

59. *Lozier*, Phys. Rev. 44 (1933) S. 575.
60. *O. Lutz*, Technische Thermodynamik dissoziierender Gasgemische. Manuskript, Braunschweig 1945.
61. *A. Magnus*, Ann. Physik (4) 48 (1915) S. 983.
62. *A. Magnus*, Ann. Physik (4) 70 (1923) S. 303.
63. *A. Magnus* u. *A. Hodler*, Ann. Physik (4) 80 (1926) S. 808.
64. *J. E. Mayer* and *M. G. Mayer*, Statistical Mechanics (John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y., 1940).
65. *Montgomery* u. *Kassel*, J. Chem. Phys. 2 (1934) S. 717.
66. *E. F Mueller* and *F. D. Rossini*, Am. J. Phys. 12 (1944) S. 1.
67. *Mullikan*, Phys. Rev. und J. Chem. Phys. ab 1932.
68. *W. Nernst*, Z. Elch. 9 (1903) S. 622.
69. *W. Nernst*, Ann. Physik (4) 36 (1911) S. 395.
70. *W. Nernst* and *F. A. Lindemann*, Z. Elektrochem. 17 (1911) S. 817.
71. *K. S. Pitzer*, J. Chem. Phys. 6 (1938) S. 68.
72. *K. S. Pitzer*, Chem. Rev. 27 (1940) S. 42.
73. *K. S. Pitzer*, J. Chem. Phys. 8 (1940) S. 711.
74. *K. S. Pitzer*, Ind. Eng. Chem. 36 (1944) S. 829.
75. *E. J. Prosen* and *F. D. Rossini*, J. Research NBS 27 (1941) S. 289, RP 1420.
76. *E. J. Prosen* and *F. D. Rossini*, J. Research NBS 27 (1941) S. 519, RP 1439.
77. *E. J. Prosen* and *F. D. Rossini*, J. Research NBS 33 (1944) S. 235, RP 1607.
78. *E. J. Prosen* and *F. D. Rossini*, J. Research NBS 33 (1944) S. 439, RP 1619.
79. *E. J. Prosen*, *R. S. Jessup* and *F. D. Rossini*, J. Research NBS 33 (1944) S. 447, RP 1620.
80. *E. J. Prosen* and *F. D. Rossini*, J. Research NBS 34 (1945) S. 163 RP 1635.
81. *E. J. Prosen* and *F. D. Rossini*, J. Research NBS 34 (1945) S. 263 RP 1642.
82. *J. W. Richardson* and *G. S. Parks*, J. Am. Chem. Soc. 61 (1939) S. 3543.
83. *R. Robertson*, *J. J. Fox* and *A. E. Martin*, Proc. Roy. Soc. (London) A 157 (1936) S. 579.
84. *Rosenthal*, J. Chem. Phys. 5 (1937) S. 465.
85. *F. D. Rossini*, BS J. Research 6 (1931) S. 37, RP 260; 7 (1931) S. 329, RP 343.
86. *F. D. Rossini*, BS J. Research 12 (1934) S. 735, RP 686.
87. *F. D. Rossini*, J. Research NBS 13 (1934) S. 21, RP 692.
88. *F. D. Rossini*, J. Research NBS 15 (1935) S. 357, RP 833.
89. *F. D. Rossini* and *R. S. Jessup*, J. Research NBS 21 (1938) S. 491, RP 1141.
90. *F. D. Rossini*, J. Chem. Phys. 6 (1938) S. 569.
91. *F. D. Rossini* and *W. E. Deming*, J. Wash. Acad. Sci. 29 (1939) S. 416.
92. *F. D. Rossini*, J. Research NBS 22 (1939) S. 407, RP 1192.
93. *F. D. Rossini*, Chem. Rev. 27 (1940) S. 1.
94. *Roth* u. *Richter*, Z. Phys. Chem. A 170 (1934) S. 123.
95. *Sackur*, Ann. Phys. 40 (1913) S. 67.
96. *Saha*, Z. Phys. 6 (1921) S. 40.
97. *P. Schläpfer* and *P. Debrunner*, Helv. Chim. Acta 7 (1924) S. 31.
98. *F. A. F. Schmidt*, Technische Mechanik und Thermodynamik 1 (1930) S. 3.
99. *Schmidt* u. *Geroe*, ref *Zeise*: Z. Elch. 47 (1942) S. 242.
100. *A. F. Shepard*, *A. L. Henne* and *T. Midgely*, Jr., J. Am. Chem. Soc. 53 (1931) S. 1948.
101. *Sponer*, Molekülspektren I (1935).
102. *Srivasta*, Proc. Roy. Soc. (London) A 175 (1940) S. 26.
103. *Tanaka* u. *Awano*, Report of the Aeronautical Research Institute Tokyo, Imp. Univ. 9 (1935) S. 493.
104. *Tetrode*, Ann. Phys. 40 (1913) S. 67.
105. *R. C. Tolman*, The Principles of Statistical Mechanics (Oxford University Press, New York, N.Y., 1938).
106. *Ulich*, Einführung in die phys. Chemie.
107. *Vogt*, Ann. Phys., Paris, Bd. 12 (1932) S. 433.
108. *D. D. Wagman*, *J. E. Kilpatrick*, *W. J. Taylor*, *K. S. Pitzer* and *F. D. Rossini*, J. Research NBS 34 (1945) S. 143, RP 1634.
109. *Wartenberg*, Z. Phys. Chem. 110 (1925) S. 285.
110. *Wartenberg* u. *Kanisch*, Z. Phys. Chem. A 170 (1932) S. 463.
111. *Wartenstein* u. *Jedrzewski*, Proc. Roy. Soc.
112. *H. F. Weber*, Ann. Physik (2) 154 (1875) S. 367.
113. *H. F. Weber*, Ann. Physik (2) 154 (1875) S. 553.
114. *E. B. Wilson*, Rev. med. Phys. 3 (1931) S. 156.
115. *E. B. Wilson*, Jr., J. Chem. Phys. 4 (1936) S. 526.
116. *E. B. Wilson*, J. Chem. Phys. 7 (1939) S. 948.
117. *E. B. Wilson*, Chem. Rev. 27 (1940) S. 27.
118. *A. G. Worthing*, Phys. Rev. 12 (1918) S. 199.
119. *Zeise*, Spektralphysik und Thermodynamik, in der Z. Elch: 39 (1933) S. 758, 895; 40 (1934) S. 662, 885; 47 (1941) S. 380, 595, 644; 48 (1942) S. 425, 476, 693.
120. Ref. *Zeise*, Z. Elch. 40 (1934) S. 886.
121. *Zeise*, Z. Elch. 43 (1937) S. 704.
122. *Zeise*, Z. Elch. 47 (1941) S. 242.
123. Ref. *Zeise*, Z. Elch. 48 (1942) S. 24.
124. *Zeise*, Z. Elch. 48 (1943) S. 23.

(Eingegangen am 18. September 1947.)

Die zweckmäßige Auswertung von punktweise aufgenommenen Zeit-Weglinien.

Von **K. Stange** in Bad Sachsa.

1. Einführung. Der funktionale Zusammenhang $x(t)$ zwischen den beiden Veränderlichen x und t sei durch eine große Zahl von Meßpunkten $x_0(t_0)$, $x_1(t_1)$, ... gegeben. Wir deuten x als den zur Zeit t erreichten Ort einer mit einem Meßgerät punktweise aufgenommenen Bewegung. Die Meßpunkte sollen in gleichen Abständen $\Delta t=\tau$ aufeinander folgen. (Hat man umgekehrt die zu gleichen Wegstrecken Δx gehörenden Zeiten $t(x)$ gemessen, so hat man in den folgenden Betrachtungen die Rollen von x und t zu vertauschen.) Der mittlere Fehler der einzelnen x-Messung sei μ, wobei μ im allgemeinen eine Funktion von x ist. Bei der Auswertung der Zeit-Weglinie $x(t)$ wird man im allgemeinen nur die erste und zweite Ableitung, Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ und Beschleunigung $\ddot{x}(t)$, bilden und aus den Ergebnissen Rückschlüsse auf die Kräfte ziehen, welche den Bewegungsvorgang beeinflussen.

Da die gegebenen x-Werte mit Meßfehlern $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_k, \ldots$ behaftet sind, liegen die Einzelpunkte $x_0, x_1, \ldots x_k, \ldots$ gemäß Abb. 1 nicht genau, sondern nur mit gewisser Streuung längs einer glatten Kurve $x(t)$. Daß man die Ableitungen $\dot{x}$ und $\ddot{x}$ nicht unmittelbar aus den durch die x-Werte gegebenen Differenzen Δx und $\Delta^2 x$ bilden kann, ist leicht einzusehen. Ist nämlich der mittlere Fehler der x-Werte gleich μ, so sind die Δx-Werte bereits mit dem mittleren Fehler $\mu_{\Delta x}=\sqrt{2}\,\mu$, die zweiten Differenzen mit $\mu_{\Delta^2 x}=\sqrt{6}\,\mu$ usw. behaftet.

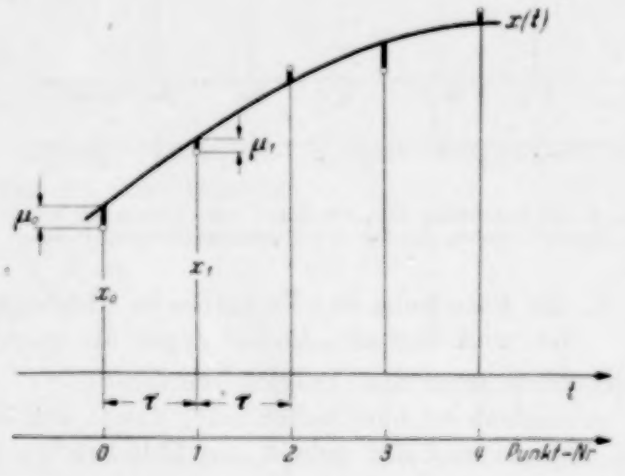

Abb. 1. Punktweise aufgenommene Zeit-Weglinie $x(t)$ mit Meßfehlern $\mu_0, \mu_1, \ldots$

Allgemein gilt für die Fehlerfortpflanzung nach dem *Gauß*schen Gesetz bei den n-ten Differenzen, wenn man deren Bildungsgesetz

$$\Delta^n_{n/2}\, x=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}x_k \tag{1$_1$}$$

zugrunde legt und für alle an der Differenzenbildung beteiligten x-Werte die gleiche Genauigkeit (d. h. den gleichen mittleren Fehler μ) annimmt,

$$\mu_{\Delta^n x}=\sqrt{\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}^2}\,\mu=\sqrt{\binom{2n}{n}}\,\mu\,. \tag{1$_2$}$$

Ersetzt man nun in bekannter Weise die Ableitungen $\dot{x}$ und $\ddot{x}$ in erster Näherung durch die zugeordneten Differenzenquotienten

$$\dot{x}\approx\frac{\Delta x}{\Delta t}\quad\text{und}\quad\ddot{x}\approx\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2}\,, \tag{2$_1$}$$

so lassen sich $\dot{x}$ und $\ddot{x}$ bei Berücksichtigung der Meßfehler μ nur in der Form

$$\dot{x}\approx\frac{\Delta x}{\Delta t}\pm\frac{\sqrt{2}\mu}{\Delta t}\quad\text{und}\quad\ddot{x}\approx\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2}\pm\frac{\sqrt{6}\,\mu}{\Delta t^2} \tag{2$_2$}$$

bestimmen. Ist insbesondere der Zeitabstand $\Delta t=\tau$ von Punkt zu Punkt „klein", wie es bei dichter Meßfolge der Fall ist, so übersteigen die Fehlerglieder $\sqrt{2}\,\mu/\Delta t, \ldots$ unter Umständen die Größenordnung der gesuchten Werte $\dot{x}, \ldots$. Die so bestimmten Ableitungen sind infolgedessen unbrauchbar.

Man sieht nun sofort, wie man bessere Ergebnisse erzielen wird:

a) Man muß den mittleren Fehler μ der Ausgangswerte vor der Differenzenbildung verkleinern, d. h. man muß die x-Werte ausgleichen, ehe man differentiiert.

b) Man muß den Zeitabschnitt Δt zur Differenzenbildung größer als den Abstand τ der Meßpunkte wählen. Der beliebigen Vergrößerung des Zeitabschnitts steht jedoch entgegen, daß man nicht zeitliche Mittelwerte der Geschwindigkeit und Beschleunigung berechnen will, sondern möglichst Augenblickswerte.

Das zu a) notwendige Ausgleichverfahren muß im Hinblick auf die praktische Verwendung im wesentlichen drei Bedingungen genügen.

1. Die erste Forderung wird sein, daß die mittleren Fehler $\bar{\mu}$ der Meßwerte $\bar{x}$ nach dem Glätten „möglichst klein" sind, und daß man übersieht, in welcher Weise $\bar{\mu}$ von dem gewählten mathematischen Aufwand beim Glätten abhängt.

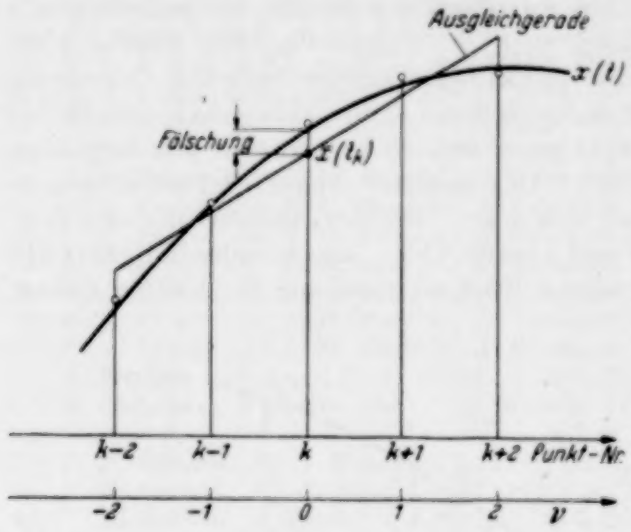

Abb. 2. Zur Entstehung der „Fälschung" beim Glätten mit Hilfe der „besten" Geraden durch je $N = 5$ aufeinanderfolgende Punkte.

Mit dem Ausgleichen ist zwangsläufig eine „Fälschung" der Funktion $x(t)$ verknüpft, da man die Funktion gewissermaßen in eine nicht immer passende Zwangsjacke steckt. Glättet man z. B. eine gekrümmte Linie $x(t)$ gemäß Abb. 2 „abschnittsweise" mit Hilfe der „besten Geraden durch je N aufeinanderfolgende Punkte", so wird der Verlauf der Kurve $x(t)$ in ganz bestimmter Weise gefälscht. Mit wachsendem mathematischen Aufwand, z. B. Verwendung einer Parabel an Stelle einer Geraden, wird im allgemeinen die Fälschung der Funktion geringer, bleibt aber grundsätzlich bestehen. Damit das Glätten sinnvoll ist, müssen wir verlangen, daß

2. die Fälschung der Funktion in Abhängigkeit vom mathematischen Aufwand abschätzbar ist, und daß sie „klein" gegen die nach dem Glätten bleibenden Restfehler $\bar{\mu}$ ausfällt.

Schließlich muß das Ausgleichverfahren

3. einfach zu handhaben sein, damit der Zeit- und Rechenaufwand in erträglichen Grenzen bleibt und die Arbeit von Hilfskräften geleistet werden kann.

Im folgenden wollen wir unter den genannten Gesichtspunkten eine Gruppe von Ausgleichkurven, nämlich die nach dem Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate bestimmten ganzen rationalen Funktionen, betrachten. Um den Zusammenhang zu wahren, wird es sich dabei nicht vermeiden lassen, auf eine Reihe bekannter Eigenschaften dieser Ausgleichfunktionen kurz einzugehen. Die Herleitung der Gleichungen, von denen wir auszugehen haben, findet man u. a. bei *Willers*[1]. Ausführlicher werden die Verfahren des Kurvenglättens von *Whittacker* und *Robinson* behandelt[2], jedoch werden die hier im Vordergrund stehenden Fragen dort nur flüchtig gestreift.

2. Das Gleichungssystem zur Berechnung der Faktoren a_ϱ. Um den geglätteten Wert $\bar{x}$ und seine Ableitungen an irgendeiner Stelle t_k zu berechnen, greifen wir aus der gegebenen Meßreihe x_k jeweils Teilbereiche von $2n+1=N$ aufeinanderfolgenden Punkten heraus, die symmetrisch zum Punkte t_k liegen (Abb. 2). Die Einzelpunkte bezeichnen wir mit x_ν und ordnen sie den Zeiten $\nu\tau$ zu. Dabei ist

$$-n \leqq \nu \leqq +n\,. \tag{3}$$

„Durch diese Punkte" legen wir eine ausgleichende Funktion vom Grade R, die wir „zeitlich dimensionslos" in der Form

$$\bar{x}(t) = \sum_{\varrho=0}^{R} a_\varrho \left(\frac{t}{\tau}\right)^\varrho \tag{4_1}$$

ansetzen. Dann haben sämtliche Faktoren a_ϱ die gleiche Dimension wie x. Der geglättete Wert an der Stelle $t=\nu\tau$,

$$\bar{x}(\nu\tau) = \sum_{\varrho=0}^{R} a_\varrho \nu^\varrho\,, \tag{4_2}$$

[1] *Fr. A. Willers*, Methoden der praktischen Analysis, S. 239 u. f. Berlin und Leipzig 1928.
[2] *Whittacker* und *Robinson*, The calculus of observations, S. 285 u. f. London 1926.

ist im folgenden nicht weiter von Bedeutung. In der Mitte des Bereichs ist

$$\bar{x}(0) = a_0 . \tag{5_1}$$

Der Anstieg der Ersatzfunktion wird

$$\dot{\bar{x}}(0) = \frac{1}{\tau} a_1 , \tag{5_2}$$

und die zweite Ableitung ist

$$\ddot{\bar{x}}(0) = \frac{2}{\tau^2} a_2 . \tag{5_3}$$

Zur Ermittlung der Werte a_ϱ hat man die einzelnen x_ν mit Einflußzahlen oder Gewichten zu multiplizieren und durch Summenbildung ein gewogenes Mittel zu berechnen. Die Gewichte, mit denen die x_ν in die Berechnung des Mittelwerts $\bar{x}(0)$ eingehen, bezeichnen wir mit λ. Da die Gewichte von der Gesamtzahl $N=2n+1$ der berücksichtigten Punkte, der Ordnung R der glättenden Funktion und der laufenden Punkt-Nr. ν abhängen, so müssen wir zur Kennzeichnung eigentlich drei Größen benutzen und schreiben

$$\lambda = \lambda(N, R, \nu) . \tag{6_1}$$

Wenn keine Verwechslung möglich ist, so unterdrücken wir die Veränderlichen N und R und schreiben einfach

$$\lambda = \lambda(\nu) = \lambda_\nu , \tag{6_2}$$

so daß

$$\bar{x}(0) = \sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda_\nu x_\nu \tag{7_1}$$

wird. Entsprechend bezeichnen wir die zur Berechnung von a_1 und a_2 notwendigen Gewichte mit λ'_ν und λ''_ν und setzen gemäß (5_2) und (5_3) für die Ableitungen

$$\dot{\bar{x}}(0) = \frac{1}{\tau} \sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda'_\nu x_\nu \tag{7_2}$$

und

$$\ddot{\bar{x}}(0) = \frac{2}{\tau^2} \sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda''_\nu x_\nu . \tag{7_3}$$

Eine wirkliche Ausgleichaufgabe liegt nur dann vor, wenn die Zahl $2n+1$ der zusammengefaßten Meßpunkte größer als der um 1 vermehrte Grad R der Funktion ist, d. h.

$$2n > R ,$$

was wir im folgenden stets voraussetzen wollen.

Außerdem darf man beim Ausgleichen mit einer Funktion vom Grade R eine beliebige Funktion vom Grade $R^* \leqq R$ vorher abziehen, ohne daß das Ergebnis des Glättens geändert wird. Dieser Hinweis ist zuweilen von Nutzen, wenn die x-Werte „große" Zahlen sind. Denn bei geeigneter Wahl der Hilfsfunktion hat man im allgemeinen nur noch „kleine" Zahlen auszugleichen. In vielen Fällen wird man schon durch eine passende Gerade für den Gesamtbereich der x-Werte ausreichende Verkleinerung der Ausgangswerte erzielen.

Bestimmt man die glättende Funktion (4_1) nach dem „Verfahren der kleinsten Quadrate", so findet man zur Berechnung der $(R+1)$ Faktoren a_ϱ die folgenden $R+1$ linearen Gleichungen[1]:

$$\sum_{\varrho=0}^{R} S_{\varrho+\alpha} a_\varrho = X_\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots R) \tag{8_1}$$

mit

$$S_{\varrho+\alpha} = \sum_{\nu=-n}^{+n} \nu^{\varrho+\alpha} \tag{8_2}$$

und

$$X_\alpha = \sum_{\nu=-n}^{+n} x_\nu \nu^\alpha . \tag{8_3}$$

Insbesondere ist

$$S_0 = 2n+1 \quad \text{und} \quad X_0 = \sum_{\nu=-n}^{+n} x_\nu . \tag{8_4}$$

[1] *Willers*, a. a. O. S. 250.

Beachtet man, daß die Potenzsumme

$$S_{\varrho+\alpha} = \begin{cases} 0 & \\ 2\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\varrho+\alpha} & (\varrho+\alpha \neq 0) \end{cases} \tag{8_5}$$

ist, je nach dem ob $\varrho+\alpha$ eine ungerade oder eine gerade positive ganze Zahl ist, so erscheint die Matrix des Gleichungssystems (8_1) in der Form

$$\left|\begin{array}{cccccc|c} S_0 & 0 & S_2 & 0 & S_4 \cdots & S_R & X_0 \\ 0 & S_2 & 0 & S_4 & 0 \cdots & S_{R+1} & X_1 \\ S_2 & 0 & S_4 & 0 & S_6 \cdots & S_{R+2} & X_2 \\ 0 & S_4 & 0 & S_6 & 0 \cdots & S_{R+3} & X_3 \\ \vdots & & & & & & \\ S_R & S_{R+1} & S_{R+2} & S_{R+3} & S_{R+4} \cdots & S_{R+R} & X_R \end{array}\right|$$

Das System hat demnach die bemerkenswerte Eigenschaft, daß es in zwei Teilsysteme zerfällt, ein „gerades" zur Berechnung von $a_0, a_2, \ldots$ und ein „ungerades" für $a_1, a_3, \ldots$.

Für einen Augenblick wollen wir annehmen, R sei eine gerade Zahl, $R=2r$. Betrachtet man den Übergang von $R=2r$ zu $R+1=2r+1$, so sieht man, daß der „gerade" Anteil ungeändert bleibt, wie es oben für $r=1$ durch die gestrichelten Linien angedeutet wird. Es ist also bei geradzahligem Wert von R gleichgültig, ob man mit einer Funktion vom Grade R oder $R+1$ glättet. Das Maß a_1 für den Anstieg ändert sich jedoch, aber nicht beim Übergang von $R+1$ zu $R+2$, wie man entsprechend nachweist. Man gewinnt auf diese Weise die folgende leicht verständliche Übersicht:

Grad	Funktionswert	Erste Ableitung	Zweite Ableitung	Dritte Ableitung
R	$\bar{x}(0)$	$\bar{x}^{\bullet}(0)\,\tau$	$\bar{x}^{\bullet\bullet}(0)\,\frac{\tau^2}{2!}$	$\bar{x}^{\bullet\bullet\bullet}(0)\,\frac{\tau^3}{3!}$
0	a_0			
1	a_0	a_1		
2	a_{0*}	a_1	a_2	
3	a_{0*}	a_{1*}	a_2	a_3
4	a_{0**}	a_{1*}	a_{2*}	a_3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Die Erhöhung der Ordnungszahl R der ausgleichenden Funktion um 1 bringt also nur dann einen anderen geglätteten Wert $\bar{x}(0)$, wenn man von einer Funktion ungerader zu einer von gerader Ordnung übergeht. Die erste Ableitung $\bar{x}^{\bullet}(0)$ bleibt dabei ungeändert, die zweite Ableitung ändert sich usw.

3. Die Berechnung der Gewichte λ_ν und λ''_ν und ihrer Momente M_α und M''_α. Für die weitere Rechnung wollen wir (8_1) in die beiden Teilsysteme aufspalten. Ist $R=2r$ oder $R=2r+1$, so wird das „gerade" System für $a_0, a_2, \ldots$ durch die ihm zugeordnete $(r+1)$-reihige Determinante mit den Spalten 0 2 4 $2r$

$$D_{r+1} = \begin{vmatrix} S_0 & S_2 & S_4 & \ldots & S_{2r} \\ S_2 & S_4 & S_6 & \ldots & S_{2r+2} \\ S_4 & S_6 & S_8 & \ldots & S_{2r+4} \\ \vdots & & & & \\ S_{2r} & S_{2r+2} & S_{2r+4} & \ldots & S_{2r+2r} \end{vmatrix} \tag{9}$$

gegeben. Die zur Ermittlung von a_0 erforderlichen, den Elementen der Spalte 0 zugeordneten Unterdeterminanten bezeichnen wir mit $A_{2\varrho}$ $(\varrho=0, 1, \ldots r)$. Dann wird

$$D_{r+1}\, a_0 = X_0 A_0 - X_2 A_2 + X_4 A_4 - \ldots \pm X_{2r} A_{2r}$$

oder abgekürzt

$$D_{r+1}\, a_0 = \sum_{\varrho=0}^{r} (-1)^{\varrho}\, X_{2\varrho}\, A_{2\varrho}\,. \tag{10_1}$$

Mit (8_3) läßt sich die letzte Gleichung in der Form

$$D_{r+1}\, a_0 = \sum_{\varrho=0}^{r} (-1)^{\varrho}\, A_{2\varrho} \sum_{\nu=-n}^{+n} x_\nu\, \nu^{2\varrho} \tag{10_2}$$

schreiben. Vertauscht man die Reihenfolge der Summationen, so kommt

$$D_{r+1}\, a_0 = \sum_{\nu=-n}^{+n} x_\nu \left[\sum_{\varrho=0}^{r} (-1)^{\varrho}\, \nu^{2\varrho}\, A_{2\varrho} \right]. \tag{10_3}$$

Damit sind die Gewichte λ_ν, mit denen die x_ν in die Berechnung des ausgeglichenen Wertes $\bar{x}(0)$ eingehen, bekannt. Es wird mit (5_1) und (7_1)

$$\lambda_\nu = \frac{1}{D_{r+1}} \sum_{\varrho=0}^{r} (-1)^{\varrho}\, \nu^{2\varrho}\, A_{2\varrho} \qquad (-n \leqq \nu \leqq +n)\,, \tag{10_4}$$

wobei D_{r+1} die Determinante (9) und $A_{2\varrho}$ die den Elementen ihrer Spalte 0 zugeordneten Unterdeterminanten sind.

Wir stellen fest, daß λ_ν eine gerade Funktion von ν wird. Es gilt

$$\lambda(-\nu) = \lambda(+\nu)\,. \tag{10_5}$$

Im Hinblick auf die spätere Verwendung wollen wir noch die auf den Mittelpunkt des Teilbereichs bezogenen Momente M_α der Einflußzahlen λ_ν, also die Summen

$$M_\alpha = \sum_{\nu=-n}^{+n} \nu^{\alpha}\, \lambda_\nu \qquad (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{11_1}$$

berechnen. M_1 ist das statische Moment und M_2 das Trägheitsmoment der Gewichte. Da λ_ν eine gerade Funktion ist, so verschwinden sämtliche M_α, falls α eine ungerade Zahl ist. Für gerade Werte von α wird mit (10_4)

$$M_\alpha = \frac{1}{D_{r+1}} \sum_{\nu=-n}^{+n} \sum_{\varrho=0}^{r} (-1)^{\varrho}\, \nu^{2\varrho+\alpha}\, A_{2\varrho}\,, \tag{11_2}$$

oder nach Umordnung bei Berücksichtigung von (8_2)

$$M_\alpha = \frac{1}{D_{r+1}} \sum_{\varrho=0}^{r} (-1)^{\varrho}\, A_{2\varrho}\, S_{2\varrho+\alpha}\,. \tag{11_3}$$

Die rechtsstehende Summe kann als Determinante geschrieben werden. Mit Rücksicht auf die Tatsache, daß die $A_{2\varrho}$ Unterdeterminanten der Spalte 0 von (9) darstellen, findet man schließlich

$$D_{r+1}\, M_\alpha = \begin{vmatrix} S_{0+\alpha} & S_2 & S_4 & \ldots & S_{2r} \\ S_{2+\alpha} & S_4 & S_6 & \ldots & S_{2r+2} \\ S_{4+\alpha} & S_6 & S_8 & \ldots & S_{2r+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{2r+\alpha} & S_{2r+2} & S_{2r+4} & \ldots & S_{4r} \end{vmatrix}\,. \tag{11_4}$$

Für $\alpha = 0$ hat die rechtsstehende Determinante den Wert D_{r+1}. Es wird demnach

$$M_0 = 1\,, \tag{11_5}$$

was auch auf Grund einer anschaulichen Betrachtung zu erwarten ist, da sich im Falle gleicher Ausgangswerte $x_\nu = \text{konst}$ bei der Summenbildung (7_1) der ursprüngliche Wert wieder herstellen muß. Für $\alpha = 2,\ 4,\ \ldots\ 2r$ verschwindet die Determinante, da in dem Falle jedesmal die Elemente von zwei Spalten übereinstimmen. Wir stellen also zusammenfassend fest

$$M_\alpha = \sum_{\nu=-n}^{+n} \nu^{\alpha}\, \lambda_\nu = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = 0\,, \\ 0 & \text{für sämtliche ungeraden Werte von } \alpha, \\ 0 & \text{für alle geraden Werte von } \alpha, \text{ falls } 2 \leqq \alpha \leqq 2r \text{ ist.} \end{cases} \tag{11_6}$$

Die Summe aller Gewichte λ_ν hat den Wert 1. Ihre auf den Mittelpunkt des Bereichs bezogenen Momente M_α von der Ordnung 1 bis $2r+1$ verschwinden sämtlich, ebenso alle höheren Momente ungerader Ordnung $2r+3$, $2r+5$, ... Das erste nicht verschwindende Moment ist M_{2r+2}.

Bei der Berechnung von a_2 können wir uns kürzer fassen, da sie grundsätzlich in der gleichen Weise vor sich geht, wie die Ermittlung von a_0. Man findet entsprechend zu (10_1) und (10_3)

$$D_{r+1}\, a_2 = \sum_{\varrho=0}^{r} (-1)^{\varrho+1}\, A''_{2\varrho}\, X_{2\varrho} \tag{12_1}$$

und

$$D_{r+1}\, a_2 = \sum_{\nu=-n}^{+n} x_\nu \left[\sum_{\varrho=0}^{r} (-1)^{\varrho+1}\, \nu^{2\varrho}\, A''_{2\varrho} \right], \tag{12_2}$$

wobei D_{r+1} wieder die Determinante (9) ist und die $A''_{2\varrho}$ ihre Unterdeterminanten darstellen, welche den Elementen der Spalte 2 zugeordnet sind. Daraus folgen die zur Berechnung von $a_2 = \sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda''_\nu\, x_\nu$ erforderlichen Einflußzahlen λ''_ν in der Form

$$\lambda''_\nu = \frac{1}{D_{r+1}} \sum_{\varrho=0}^{r} (-1)^{\varrho+1}\, \nu^{2\varrho}\, A''_{2\varrho} \quad (-n \leqq \nu \leqq +n)\,. \tag{12_3}$$

Auch λ''_ν ist eine gerade Funktion von ν,

$$\lambda''(-\nu) = \lambda''(+\nu)\,. \tag{12_4}$$

Ähnlich wie vorhin verschwinden demnach auch jetzt die Momente M''_α der Einflußzahlen λ''_ν,

$$M''_\alpha = \sum_{\nu=-n}^{+n} \nu^\alpha\, \lambda''_\nu \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots)\,, \tag{13_1}$$

für ungerade Werte von α. Insgesamt findet man durch eine ähnliche Rechnung wie vorhin

$$M''_\alpha = \sum_{\nu=-n}^{+n} \nu^\alpha\, \lambda''_\nu = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } \alpha = 2\,, \\ 0 & \text{für } \alpha = 0, 4, 6, \ldots 2r\,, \\ 0 & \text{für alle ungeraden Werte von } \alpha. \end{array} \right\} \tag{13_2}$$

Bis zur Ordnung $2r+1$ verschwinden demnach sämtliche Momente mit Ausnahme von $M''_2 = 1$. Das nächste von 0 verschiedene Moment ist M''_{2r+2}.

4. Die Berechnung der Gewichte λ'_ν und ihrer Momente M'_α. Zur Berechnung von a_1 haben wir das ungerade Teilsystem von (8_1) heranzuziehen. Es wird für $R = 2r$ und $R = 2r-1$ durch die r-reihige Determinante

$$D'_r = \begin{vmatrix} S_2 & S_4 & S_6 & \ldots & S_{2r} \\ S_4 & S_6 & S_8 & \ldots & S_{2r+2} \\ S_6 & S_8 & S_{10} & \ldots & S_{2r+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{2r} & S_{2r+2} & S_{2r+4} & \ldots & S_{4r-2} \end{vmatrix} \tag{14}$$

und die rechten Seiten der Gleichungen $X_1, X_3, X_5, \ldots X_{2r-1}$ gekennzeichnet. Nennen wir die den Elementen ihrer ersten Spalte zugeordneten Unterdeterminante $A'_{2\varrho}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots r)$, so wird

$$D'_r a_1 = X_1 A'_2 - X_3 A'_4 + \ldots \pm X_{2r-1}\, A'_{2r}$$

oder

$$D'_r\, a_1 = \sum_{\varrho=1}^{r} (-1)^{\varrho+1} A'_{2\varrho}\, X_{2\varrho-1}\,. \tag{15_1}$$

Führt man gemäß (8_3)

$$X_{2\varrho-1} = \sum_{\nu=-n}^{+n} x_\nu\, \nu^{2\varrho-1} \tag{15_2}$$

in die letzte Gleichung ein und ordnet die entstehende Doppelsumme um, so erhält man schließlich entsprechend zu (10_3) und (12_4)

$$D'_r a_1 = \sum_{\nu=-n}^{+n} x_\nu \left[\sum_{\varrho=1}^{r} (-1)^{\varrho+1} \nu^{2\varrho-1} A'_{2\varrho} \right]. \qquad (15_3)$$

Die Gewichte λ'_ν zur Berechnung von a_1 werden demnach

$$\lambda'_\nu = \frac{1}{D'_r} \sum_{\varrho=1}^{r} (-1)^{\varrho+1} \nu^{2\varrho-1} A'_{2\varrho} . \qquad (15_4)$$

Hier ist λ'_ν eine ungerade Funktion von ν,

$$\lambda'(-\nu) = -\lambda'(+\nu) . \qquad (15_5)$$

Bezüglich der Momente M'_α der Einflußzahlen λ'_ν finden wir durch eine der früheren ähnliche Rechnung entsprechend zu (11_6) und (13_2)

$$M'_\alpha = \sum_{\nu=-n}^{+n} \nu^\alpha \lambda'_\nu = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } \alpha = 1 , \\ 0 & \text{für alle ungeraden Werte von } \alpha, \text{ falls } 3 \leqq \alpha \leqq 2r-1 \text{ ist} , \\ 0 & \text{für sämtliche geraden Werte von } \alpha \text{ einschließlich } \alpha = 0 . \end{array} \right\} \qquad (16)$$

Es verschwinden also mit Ausnahme von $M'_1 = 1$ sämtliche Momente bis zur Ordnung $2r$ einschließlich. Das auf M'_1 folgende erste nicht verschwindende Moment ist M'_{2r+1}.

5. Die mittleren Fehler $\bar{\mu}$, $\bar{\mu}'$ und $\bar{\mu}''$ der Faktoren a_0, a_1 und a_2. Durch die Zusammenfassung zahlreicher Punkte N zum Ausgleichen wird der mittlere Fehler $\bar{\mu}$ der geglätteten Werte herabgedrückt. Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz gilt für den Fehler $\bar{\mu}$ des geglätteten Wertes a_0 gemäß (7_1)

$$\bar{\mu}^2 = \sum_{\nu=-n}^{+n} [\lambda_\nu \mu(x_\nu)]^2 . \qquad (17_0)$$

Streng genommen ist dabei μ eine Funktion von x, da sich die Meßgenauigkeit über einen größeren Bereich hinweg ändern wird. Für die $N = 2n+1$ Punkte eines Teilbereichs wird man jedoch bei dichter Meßfolge im allgemeinen die gleiche Meßgenauigkeit zugrunde legen können, ohne einen ins Gewicht fallenden Fehler bei der Berechnung von $\bar{\mu}$ in Kauf nehmen zu müssen. In dem Falle folgt aus (17_0) einfach

$$\left(\frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)^2 = \sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda_\nu^2 = \text{Funktion}(N, R) . \qquad (17_1)$$

Das Verhältnis $\bar{\mu}/\mu$ der Fehler hängt von der Anzahl N der zusammengefaßten Punkte und der Ordnung R der glättenden Funktion ab.

Entsprechend gilt für die mittleren Fehler $\bar{\mu}'$ von a_1 und $\bar{\mu}''$ von a_2

$$\left(\frac{\bar{\mu}'}{\mu}\right)^2 = \sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda_\nu'^2 \qquad (17_2)$$

und

$$\left(\frac{\bar{\mu}''}{\mu}\right)^2 = \sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda_\nu''^2 . \qquad (17_3)$$

Für die praktisch wichtigen Fälle $R \leqq 5$ (bzw. $0 \leqq r \leqq 2$) lassen sich die zur Fehlerabschätzung wichtigen Summen (17) in einfacher Form darstellen. Zunächst wird für $r = 0, 1, 2$ aus (10_4) der Reihe nach

$$\left. \begin{array}{l} (\lambda_\nu)_0 = \dfrac{1}{D_1} = \text{konst} \\ (\lambda_\nu)_1 = \dfrac{1}{D_2} (S_4 - S_2 \nu^2) \\ (\lambda_\nu)_2 = \dfrac{1}{D_3} (A_0 - A_2 \nu^2 + A_4 \nu^4) . \end{array} \right\} \qquad (18)$$

Dabei ist nach (9)

$$D_1 = S_0, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_2 \\ S_2 & S_4 \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} S_0 & S_2 & S_4 \\ S_2 & S_4 & S_6 \\ S_4 & S_6 & S_8 \end{vmatrix}, \qquad (19_1)$$

und A_0, A_2, A_4 sind die Unterdeterminanten der Elemente S_0, S_2, S_4 von D_3,

$$A_0 = \begin{vmatrix} S_4 & S_6 \\ S_6 & S_8 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} S_2 & S_4 \\ S_6 & S_8 \end{vmatrix}, \quad A_4 = \begin{vmatrix} S_2 & S_4 \\ S_4 & S_6 \end{vmatrix}. \tag{19$_2$}$$

Es wird also für $r=0$

$$\left(\sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda_\nu^2\right)_{r=0} = \frac{S_0}{D_1^2} = \frac{1}{S_0} \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)_{R=0;1} = \frac{1}{\sqrt{S_0}}. \tag{20$_1$}$$

Für $r=1$ gilt

$$\sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda_\nu^2 = \frac{1}{D_2^2} \sum_{\nu=-n}^{+n} (S_4^2 - 2\, S_2\, S_4\, \nu^2 + S_2^2\, \nu^4),$$

oder nach Ausführung der Summation bei Berücksichtigung von (8_2),

$$\sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda_\nu^2 = \frac{1}{D_2^2} (S_4^2\, S_0 - 2\, S_2\, S_4\, S_2 + S_2^2\, S_4).$$

Daraus folgt wegen (19_1) und (18) schließlich

$$\left(\sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda_\nu^2\right)_{r=1} = \frac{S_4}{D_2} = (\lambda_0)_{r=1} \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)_{R=2;3} = \sqrt{\frac{S_4}{D_2}}. \tag{20$_2$}$$

Für $r=2$ wird entsprechend

$$D_3^2 \sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda_\nu^2 = A_0^2\, S_0 + A_2^2\, S_4 + A_4^2\, S_8 - 2\, A_0\, A_2\, S_2 + 2\, A_0\, A_4\, S_4 - 2\, A_2\, A_4\, S_6.$$

Setzt man hier für A_0, A_2 und A_4 die durch (19_2) gegebenen Ausdrücke $S_4 S_8 - S_6^2$ usw. ein, so findet man nach kurzer Rechnung, daß sich die rechte Seite der letzten Gleichung in der Gestalt

$$\left[S_0 (S_4 S_8 - S_6^2) - S_2 (S_2 S_8 - S_4 S_6) + S_4 (S_2 S_6 - S_4^2)\right] (S_4 S_8 - S_6^2) = D_3 (S_4 S_8 - S_6^2)$$

schreiben läßt. Damit findet man schließlich

$$\left.\begin{aligned} &\left(\sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda_\nu^2\right)_{r=2} = \frac{S_4 S_8 - S_6^2}{D_3} = (\lambda_0)_{r=2} \\ &\text{und} \\ &\left(\frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)_{R=4;5} = \sqrt{\frac{S_4 S_8 - S_6^2}{D_3}}. \end{aligned}\right\} \tag{20$_3$}$$

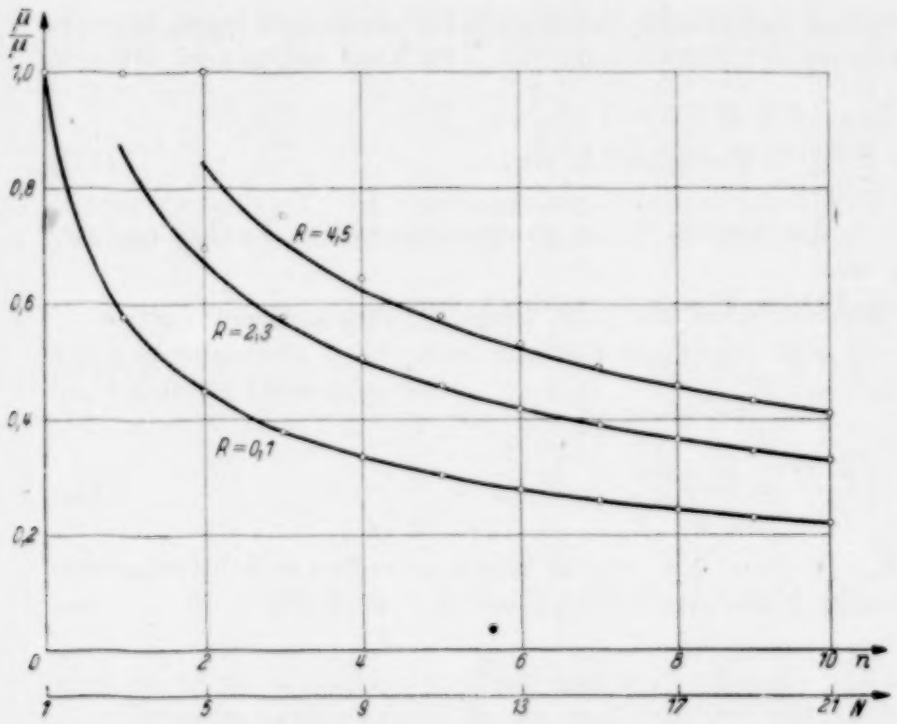

Abb. 3. Abnahme des mittleren Fehlers $f_p = \bar{\mu}$ der Funktionswerte $\bar{\bar{x}}$ beim Glätten mit wachsendem mathematischen Aufwand. μ mittlerer Fehler der Ausgangswerte, R Ordnung der abschnittsweise benutzten Ersatzfunktion, N Zahl der zusammengefaßten Meßpunkte. Die Kreispunkte entsprechen der genauen Rechnung, die Kurven den asymptotischen Formeln für große n.

Da die Berechnung der anderen Summen ähnlich vor sich geht, begnügen wir uns mit der Angabe der Ergebnisse. Man findet aus (15_4) und (14)

$$\left(\sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda_\nu'^2\right)_{r=1} = \frac{S_2}{D_1'^2} = \frac{1}{S_2}, \tag{21$_1$}$$

$$\left(\sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda_\nu'^2\right)_{r=2} = \frac{S_6}{D_2'} = \frac{S_6}{S_2 S_6 - S_4^2}, \tag{21$_2$}$$

und aus (12_4) und (9)

$$\left(\sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda_\nu''^2\right)_{r=1} = \frac{S_0}{D_2} = \frac{S_0}{S_0 S_4 - S_2^2}, \tag{22$_1$}$$

$$\left(\sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda_\nu''^2\right)_{r=2} = \frac{S_0 S_8 - S_4^2}{D_3}. \tag{22$_2$}$$

Zahlenmäßige Ergebnisse sind aus den Abb. 3, 4 und 5 ersichtlich. Für festgehaltene Ordnung $R = (0, 1); (2, 3); (4, 5)$ wird der Verlauf von $\bar{\mu}/\mu$ über n im Bereich $0 \leqq n \leqq 10$ (d. h. $1 \leqq N \leqq 21$) durch die Kreispunkte veranschaulicht. Die Bedeutung der außerdem

in den Abbildungen enthaltenen Kurven wird später erörtert. Bei festem R sinkt der wahrscheinliche Fehler $\bar{\mu}$ mit wachsendem n zunächst stark ab. Überschreitet n jedoch einen gewissen Betrag, so bringt die weitere Vergrößerung, d. h. die Hinzunahme weiterer Punkte zum Glätten, keinen großen Gewinn an Genauigkeit, so daß sich der Mehraufwand an Rechenarbeit nicht lohnt. Für kleine Werte von n sind die Ergebnisse mit Vorbehalt aufzufassen, da Voraussetzung für die Gültigkeit der Fehlerfortpflanzung stets eine „große" Punkt- bzw. Fehlerzahl ist, weil sich nur dann die statistischen Gesetzmäßigkeiten voll auswirken können. Im übrigen ist aus Abb. 3 ersichtlich, daß man bei fester Punktzahl $N=$konst um so besser glättet, je niedriger die Ordnung R der Ausgleichfunktion gewählt wird. Das ist auch anschaulich einleuchtend, da man bei gegebener Punktzahl $N=2n+1$ durch Erhöhung der Ordnung R bis zum Werte $N-1$ schließlich auf den Fall der „Interpolation" kommt, wobei gar kein Ausgleichen mehr stattfindet und $\bar{\mu}=\mu$ ist. Die in Abb. 4 und 5 dargestellten Verhältnisse für $\bar{\mu}'/\mu$ und $\bar{\mu}''/\mu$ liegen ähnlich und bedürfen keiner weiteren Erläuterung. Im Hinblick auf später haben wir abweichend von Abb. 3 jetzt $n(\bar{\mu}'/\mu)$ bzw. $n^2(\bar{\mu}''/\mu)$ über n aufgetragen.

6. Die Fälschung der Funktion und ihrer Ableitungen. Da wir die durch Messung gegebene Erfahrungsfunktion $x(t)$ stückweise durch Potenzreihen beschränkten Grades annähern, so ist mit dem Ausgleichen eine Fälschung der Funktionswerte verbunden, wie bereits eingangs erläutert wurde. Zur Untersuchung dieser Fälschung oder, wie wir auch sagen wollen, des „mathematischen Fehlers" f_M setzen wir voraus, daß die Funktion, die wir mit Hilfe einer Potenzreihe vom Grade R glätten, wenigstens $(R+2)$-mal differentiierbar ist. Außerdem dürfen wir den Einfluß der Meßfehler μ auf das Ergebnis jetzt außer Betracht lassen, was wir durch das Zeichen $_*$ andeuten.

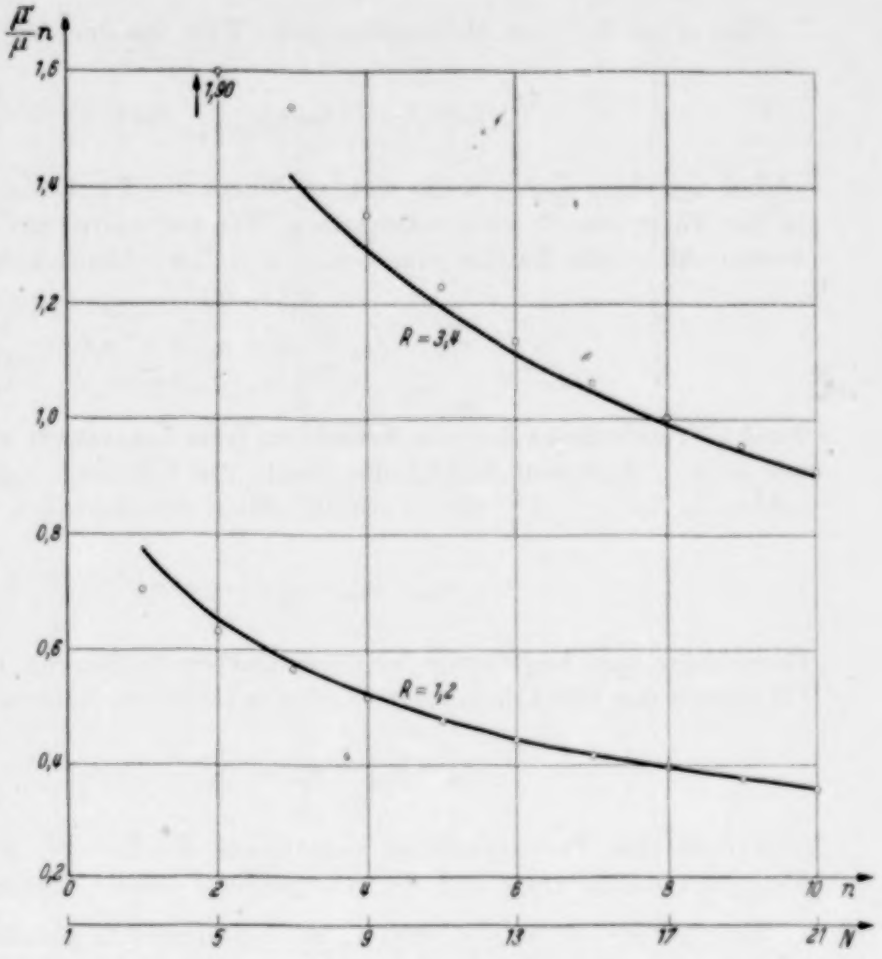

Abb. 4. Abnahme des mittleren Fehlers $f'_p = \left(\frac{\bar{\mu}'}{\mu} n\right) \frac{\mu}{n\tau}$ der ersten Ableitung $\bar{x}^*$. (Zur Bezeichnung vgl. Abb. 3.)

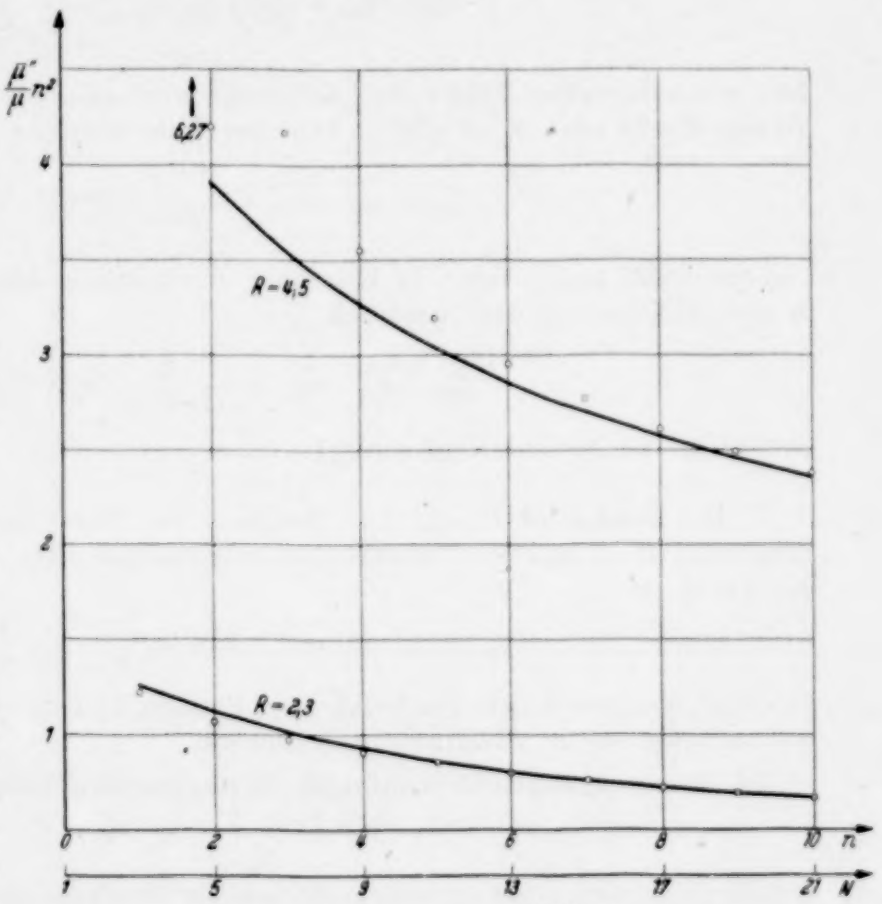

Abb. 5. Abnahme des mittleren Fehlers $f''_p = \left(\frac{\bar{\mu}''}{\mu} n^2\right) \frac{2\mu}{(n\tau)^2}$ der zweiten Ableitung $\bar{x}^{**}$. (Zur Bezeichnung vgl. Abb. 3.)

Dann ist der von Meßfehlern freie Wert an der Stelle $t=\nu\tau$

$$x_{\nu *} = x_{0*} + \dot{x}_{0*}\,\nu\tau + \frac{1}{2!}\,\ddot{x}_{0*}\,(\nu\tau)^2 + \frac{1}{3!}\,\dddot{x}_{0*}\,(\nu\tau)^3 + \cdots , \qquad (23_1)$$

wobei x_{0*}, $\dot{x}_{0*}$, $\ddot{x}_{0*}$, ... die wahren Werte der Funktion und ihrer Ableitungen für $t=0$, d. h. in der Mitte des Bereichs, darstellen. Wir multiplizieren die letzte Gleichung mit λ_ν und summieren über alle Punkte von $-n \leqq \nu \leqq +n$. Dann kommt

$$\sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda_\nu\, x_{\nu *} = x_{0*} \sum_{\nu=-n}^{+n} \lambda_\nu + \dot{x}_{0*}\,\tau \sum_{\nu=-n}^{+n} \nu\,\lambda_\nu + \frac{1}{2!}\,\ddot{x}_{0*}\,\tau^2 \sum_{\nu=-n}^{+n} \nu^2\,\lambda_\nu + \cdots \qquad (23_2)$$

Nach (7_1) steht links der von Meßfehlern freie Ersatzwert $\bar{x}_{0*}$ in der Mitte des Bereichs. Beachten wir weiter, daß gemäß (11_6) die rechts als Faktoren auftretenden Momente M_a der Einflußzahlen λ_ν für $1 \leqq a \leqq 2r+1$ einschließlich verschwinden und daß $M_0=1$ ist, so finden wir

$$\bar{x}_{0*} = x_{0*} + \frac{1}{(2r+2)!}\,x_{0*}^{(2r+2)}\,\tau^{2r+2}\,M_{2r+2} + \cdots \qquad (23_3)$$

Die infolge des begrenzten mathematischen Aufwands beim Glätten in Kauf zu nehmende Fälschung der Funktionswerte wird also in erster Näherung

$$f_M = \bar{x}_{0*} - x_{0*} \approx \frac{1}{(2r+2)!}\,x_{0*}^{(2r+2)}\,\tau^{2r+2}\,M_{2r+2}\,, \qquad (23_4)$$

falls man eine Potenzfunktion vom Grade $R=2r$ oder $R+1=2r+1$ verwendet. Das Moment M_{2r+2} ist durch (11_4) und (9) als Quotient zweier Determinanten gegeben.

Multipliziert man (23_1) mit λ'_ν und summiert in gleicher Weise wie vorhin von $\nu=-n$ bis $\nu=+n$, so kommt bei Berücksichtigung von (7_2) und (16) schließlich als Ersatzwert $\bar{\dot{x}}_{0*}$ der Ableitung in der Mitte des Bereichs

$$\bar{\dot{x}}_{0*} = \dot{x}_{0*} + \frac{1}{(2r+1)!}\,x_{0*}^{(2r+1)}\,\tau^{2r} \sum_{\nu=-n}^{+n} \nu^{2r+1}\,\lambda'_\nu + \cdots \qquad (24_1)$$

Der mathematische Fehler der Ableitung wird also bei Verwendung einer Potenzreihe vom Grade $R=2r$ oder $R-1=2r-1$ in erster Näherung

$$f'_M = \bar{\dot{x}}_{0*} - \dot{x}_{0*} \approx \frac{1}{(2r+1)!}\,x_{0*}^{(2r+1)}\,\tau^{2r}\,M'_{2r+1}\,. \qquad (24_2)$$

Entsprechend findet man als Fälschung der zweiten Ableitung mit (7_3) und (13_2) schließlich in erster Näherung den Ausdruck

$$f''_M = \bar{\ddot{x}}_{0*} - \ddot{x}_{0*} \approx \frac{2}{(2r+2)!}\,x_{0*}^{(2r+2)}\,\tau^{2r}\,M''_{2r+2}\,, \qquad (25)$$

gültig für $R=2r$ und $R+1=2r+1$.

7. Der Sonderfall $R=2$. Zur Belebung der Vorstellung wollen wir die Formeln für den Sonderfall $R=2$ bzw. $r=1$ ausführlich hinschreiben. Als Ausgleichkurven wählen wir nach (4_2) die Parabeln

$$\bar{x}(t) = a_0 + a_1\,\frac{t}{\tau} + a_2\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$$

durch je $N=2n+1$ aufeinanderfolgende Punkte. Das ist offenbar der einfachste Fall, mit dem wir auch die zweite Ableitung noch erfassen.

Die kennzeichnende Determinante (9) des geraden Teilsystems (8_1) wird mit $r=1$

$$D_2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_2 \\ S_2 & S_4 \end{vmatrix}\,.$$

Dabei sind die Potenzsummen (8_5) in Abhängigkeit von n durch die folgenden Ausdrücke gegeben:

$$
\left.\begin{aligned}
S_0 &= 2n+1 && = 2n^0\left(\frac{n}{1}+\frac{1}{2}\right),\\
S_2 &= \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1) && = 2n^2\left(\frac{n}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}\right),\\
S_4 &= \frac{1}{15}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) && = 2n^4\left(\frac{n}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3n}+\cdots\right),\\
S_6 &= \frac{1}{21}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1) && = 2n^6\left(\frac{n}{7}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+\cdots\right),\\
S_8 &= \frac{1}{45}n(10n^8+45n^7+60n^6-42n^4+20n^2-3) && = 2n^8\left(\frac{n}{9}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3n}+\cdots\right)
\end{aligned}\right\} \quad (26_1)
$$

usw.[1].

Mit (26_1) wird die kennzeichnende Determinante

$$
D_2 = \frac{1}{45}n(n+1)(2n-1)\times \times (2n+1)^2(2n+3)\,. \quad (26_2)
$$

Die Gewichte[2] λ_ν und λ''_ν zur Berechnung von a_0 und a_2 findet man aus (18) und (12_4) zu

$$
(\lambda_\nu)_{R=2;3} = 3\times \times \frac{(3n^2+3n-1)-5\nu^2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \quad (27_1)
$$

und

$$
(\lambda''_\nu)_{R=2;3} = 15\times \times \frac{3\nu^2-n(n+1)}{n(n+1)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\,. \quad (27_2)
$$

Die Berechnung von λ'_ν wird besonders einfach, da das ungerade Teilsystem (8_1) nur die Unbekannte a_1 enthält. Nach (14) wird $D'_1 = S_2$, also nach (15_4) und (26_1)

$$
(\lambda'_\nu)_{R=2;1} = \frac{3\nu}{n(n+1)(2n+1)}\,. \quad (27_3)
$$

Der Verlauf der Einflußzahlen über ν ist aus Abb. 6 ersichtlich. Die eingezeichneten Kreispunkte gelten für $n=10$. Mit unbegrenzt wachsendem n streben die Gewichtskurven $n\lambda_\nu$, $n^2\lambda'_\nu$ und $n^3\lambda''_\nu$ gegen die ebenfalls dargestellten Grenzkurven $(n\lambda_\nu)_\infty$, $(n^2\lambda'_\nu)_\infty$ und $(n^3\lambda''_\nu)_\infty$. Bereits für $n=10$ sind die Unterschiede nicht mehr beträchtlich.

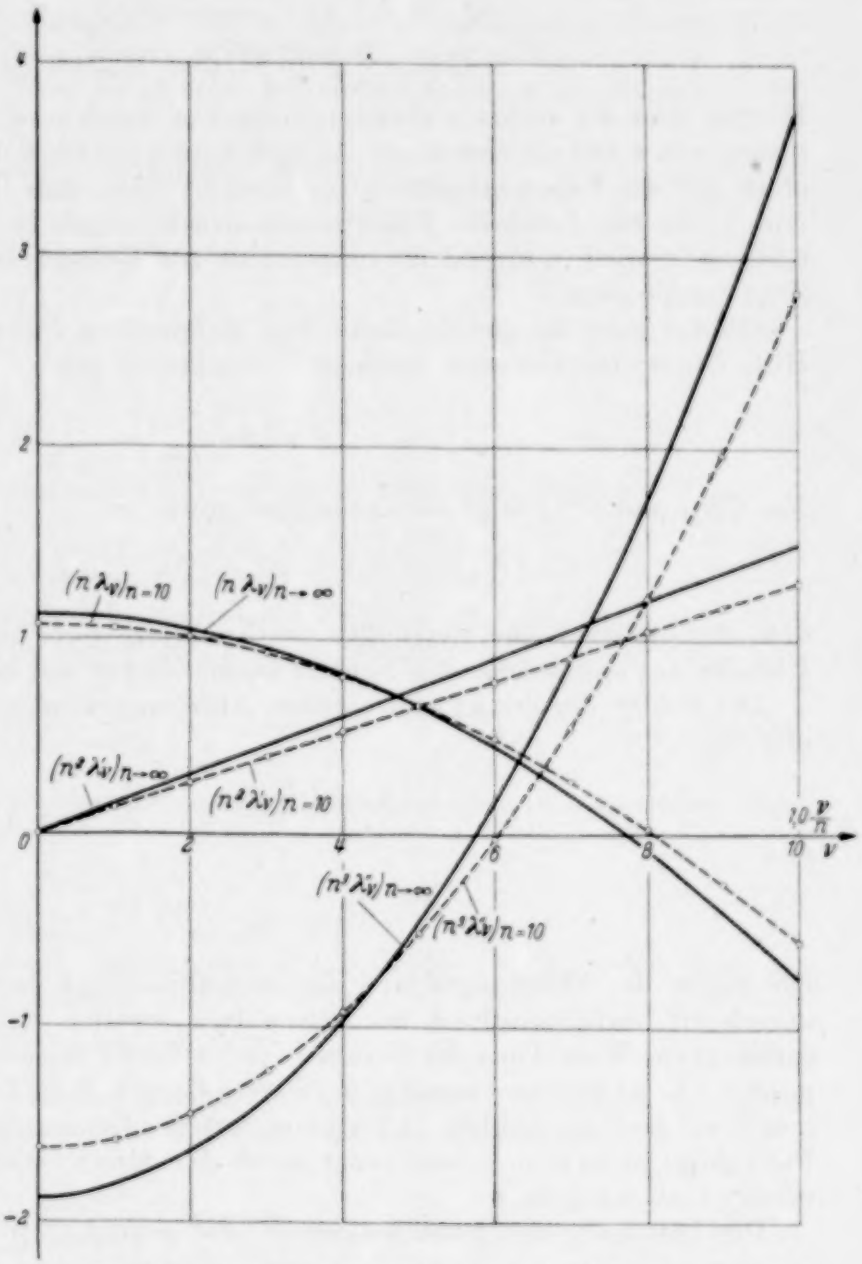

Abb. 6. Verlauf der Gewichtskurven $n\lambda_\nu$, $n^2\lambda_\nu'$ und $n^3\lambda_\nu''$ für $n=10$ und $n\to\infty$.

Die auf die jeweilige Bereichmitte bezogenen Momente M_4, M'_3 und M''_4 der Einflußzahlen λ_ν, λ'_ν und λ''_ν werden aus (11_4), (16) und (13_1) berechnet. Man findet mit (26_1) und (27)

---

[1] Ein anschauliches Verfahren zur fortlaufenden Berechnung dieser Summen findet man bei *R. Courant*, Differential- und Integralrechnung, S. 19. Berlin 1927. Eine Zahlentafel, welche die Summen S_α für $1\leqq n\leqq 10$ und $2\leqq\alpha\leqq 16$ ausgerechnet enthält, steht bei *Whittacker* und *Robinson*, a. a. O. S. 294.

[2] Die Gewichte λ_ν für $R=2;3$ und $1\leqq n\leqq 10$ sind berechnet bei *Whittacker* und *Robinson*, a. a. O. S. 295.

$$\left.\begin{aligned} M_4 &= -\frac{3}{35}\, n(n+1)\,(n^2+n-2)\,, \\ M_3' &= +\frac{1}{5}\,(3n^2+3n-1)\,, \\ M_4'' &= +\frac{1}{7}\,(6n^2+6n-5)\,. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Für die nach dem Glätten bleibenden physikalischen Restfehler $\bar{\mu}$, $\bar{\mu}'$ und $\bar{\mu}''$ gilt nach (20_2), (21_1) und (22_1)

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)_{R=2;3} &= \sqrt{\frac{3(3n^2+3n-1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}} \approx \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{N}}\,, \\ \left(n\,\frac{\bar{\mu}'}{\mu}\right)_{R=2;1} &= \sqrt{\frac{3n}{(n+1)(2n+1)}} \approx \sqrt{\frac{3}{N+2}}\,, \\ \left(n^2\,\frac{\bar{\mu}''}{\mu}\right)_{R=2;3} &= \sqrt{\frac{45n^3}{(n+1)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}} \approx \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{N+4}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{29$_1$}$$

Hierbei sind die rechts stehenden einfachen Ausdrücke, welche in der Entwicklung nach Potenzen von n nur die ersten zwei Glieder berücksichtigen, bereits für $n>3$ bzw. $N>7$ brauchbar, ohne daß die Vernachlässigung ins Gewicht fällt. Das lehrt auch ein Blick auf die Abb. 3, 4 und 5, wo der durch die Näherungsausdrücke gegebene Verlauf des Fehlers durch die Kurven dargestellt wird, während die eingezeichneten Kreispunkte dem genauen Teil der Gleichungen (29_1) entsprechen.

Glättet man die gleiche Reihe von Meßpunkten nicht „quadratisch", sondern „linear" mit Hilfe der besten Geraden durch je N Punkte, so gilt

$$\left(\frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)_{R=1} = \frac{1}{\sqrt{N}}\,. \tag{29$_2$}$$

Aus (29_1) und (29_2) folgt für „genügend große" n

$$\bar{\mu}_{R=2} \approx \frac{3}{2}\,\bar{\mu}_{R=1}\,, \tag{29$_3$}$$

d. h. der physikalische Restfehler der Funktionswerte beim Glätten mit einer Parabel ist das 1,5fache des entsprechenden Fehlers beim Glätten mit einer Geraden.

Die Fehler der ersten und zweiten Ableitung werden bei großen Werten von n wegen (5_2) und (5_3)

$$f_P' = \left(\frac{\bar{\mu}'}{\tau}\right)_{R=2;1} \approx \sqrt{3}\,\frac{1}{n\tau}\,\frac{1}{\sqrt{N+2}}\,\mu \tag{29$_4$}$$

und

$$f_P'' = \left(2\,\frac{\bar{\mu}''}{\tau^2}\right)_{R=2;3} \approx 3\sqrt{5}\,\frac{1}{(n\tau)^2}\,\frac{1}{\sqrt{N+4}}\,\mu\,. \tag{29$_5$}$$

Die Fehler der Ableitungen sind also verhältnisgleich dem Meßfehler μ der Ausgangswerte und umgekehrt verhältnisgleich zur ersten bzw. zweiten Potenz der „Bereichbreite" $B=n\tau$ und (nahezu) zur Wurzel aus der Gesamtzahl $N=2n+1$ der abschnittsweise zusammengefaßten Meßpunkte. Es ist also zweckmäßig, bei festem Bereich B die Zahl n der darin enthaltenen Meßpunkte möglichst groß zu wählen. (Allerdings darf die Genauigkeit der Auswertung unter der dichten Punktfolge nicht leiden, weil sonst durch das damit verbundene Anwachsen von μ der Gewinn wieder verloren geht.)

Die Fälschung der Funktionswerte wird gemäß (23_4) und (28)

$$f_M = \left(\bar{x}_{0*} - x_{0*}\right)_{R=2;3} \approx -\frac{1}{280}\,x_{0*}^{(4)}\,(n\tau)^4\left(1+\frac{2}{n}\right). \tag{31$_1$}$$

Für die erste und zweite Ableitung findet man aus (24_2), (25) und (28)

$$f_M' = \left(\bar{\dot{x}}_{0*} - \dot{x}_{0*}\right)_{R=2;1} \approx +\frac{1}{10}\,\dddot{x}_{0*}\,(n\tau)^2\left(1+\frac{1}{n}\right) \tag{31$_2$}$$

und

$$f_M'' = \left(\bar{\ddot{x}}_{0*} - \ddot{x}_{0*}\right)_{R=2;3} \approx +\frac{1}{14}\,x_{0*}^{(4)}\,(n\tau)^2\left(1+\frac{1}{n}\right). \tag{31$_3$}$$

Unter sonst gleichen Verhältnissen wächst demnach der mathematische Fehler für „große" n im wesentlichen mit einer Potenz der Bereichbreite $B=n\tau$. Die Fälschung der Funktion hängt also nicht von der Punktzahl n, sondern im großen ganzen nur von dem Produkt $n\tau$ ab. Dadurch, daß man in einem vorgegebenen festen Bereich B möglichst viele Meßpunkte wählt, wird der mathematische Fehler beim Ausgleichen nicht (wesentlich) beeinflußt.

Da die durch (26_1) gegebenen Summen S_α bereits für kleine Werte von α verwickelte Funktionen von n sind, und da bei der Berechnung der wichtigsten Größen für $R>2$ drei- oder vierreihige Determinanten auftreten, welche die eben genannten Summen als Elemente besitzen, so scheint es auf den ersten Blick hoffnungslos zu sein, zu einfachen Endformeln zu gelangen, wenn der Grad der Ausgleichfunktion den Wert 2 überschreitet. Wir werden jedoch im Abschnitt 9 einen Weg zeigen, auf dem auch diese Fälle der Rechnung zugänglich werden.

8. Die praktische Form des Glättens für $R=2$. Das Ausgleichverfahren zur Berechnung von $\bar{x}$, $\bar{x}'$ und $\bar{x}''$ mit Hilfe der Gewichte λ_ν, λ'_ν und λ''_ν ist nur dann zweckmäßig, wenn man nur wenige Einzelwerte bestimmen will. Handelt es sich jedoch um die Auswertung langer Meßreihen, so ist die im folgenden geschilderte Form des Verfahrens zweckmäßiger.

Nach (10_1) erscheint der geglättete Wert $\bar{x}_k$ an einer beliebigen Stelle in der Gestalt

$$\bar{x}_k = \frac{1}{D_2}\left(S_1 \sum_{\nu=-n}^{+n} x_{k+\nu} - S_2 \sum_{\nu=-n}^{+n} \nu^2 x_{k+\nu}\right). \tag{32_1}$$

Das formen wir um zu

$$\bar{x}_k = \alpha_n A_k + \gamma_n C_k \tag{32_2}$$

mit

$$\alpha_n = \frac{n S_4}{D_2}, \qquad \gamma_n = -\frac{n^3 S_2}{D_2} \tag{32_3}$$

und

$$A_k = \sum_{\nu=-n}^{+n} \frac{x_{k+\nu}}{n}, \qquad C_k = \sum_{\nu=-n}^{+n} \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 \frac{x_{k+\nu}}{n}. \tag{32_4}$$

Die Faktoren α_n und γ_n sind gemäß (26_1) und (26_2) nur von n abhängige Zahlen

$$\alpha_n = \frac{3n(3n^2+3n-1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}, \qquad \gamma_n = -\frac{15n^3}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}, \tag{33}$$

und lassen sich von vornherein in Zahlentafeln zusammenstellen.

Die Summen A_k, C_k und (was wir für das folgende gleich hinzunehmen wollen)

$$B_k = \sum_{\nu=-n}^{+n} \frac{\nu}{n} \frac{x_{k+\nu}}{n} \tag{34}$$

lassen sich in einfacher Weise fortlaufend berechnen, was wir im folgenden zeigen wollen. Dazu setzen wir zur Abkürzung vorübergehend

$$\frac{x_{k+\nu}}{n} = \xi_{k+\nu}. \tag{35}$$

Haben wir durch Addition der $2n+1$ Summanden $\xi_{k-n}, \ldots \xi_k, \ldots \xi_{k+n}$ den Wert A_k gemäß (32_4) gebildet, so wird der nächste Wert

$$A_{k+1} = A_k + \xi_{k+1+n} - \xi_{k-n}, \tag{36_1}$$

wie man sofort sieht, wenn man die Summen ausführlich hinschreibt. Man findet also jedes folgende A_{k+1} aus dem vorangehenden A_k durch Addition von zwei Summanden.

Weiter ist nach (34)

$$n B_{k+1} = \sum_{\nu=-n}^{+n} \nu \xi_{k+1+\nu}.$$

Setzen wir für einen Augenblick $\nu+1=\varepsilon$, so wird

$$\begin{aligned} n B_{k+1} &= \sum_{\varepsilon=-n+1}^{n+1} (\varepsilon-1)\,\xi_{k+\varepsilon} \\ &= \sum_{\varepsilon=-n}^{+n} (\varepsilon-1)\,\xi_{k+\varepsilon} + n\,\xi_{k+1+n} + (n+1)\,\xi_{k-n} \\ &= \sum_{\varepsilon=-n}^{+n} \varepsilon\,\xi_{k+\varepsilon} - \sum_{\varepsilon=-n}^{+n} \xi_{k+\varepsilon} + n\,\xi_{k+1+n} + (n+1)\,\xi_{k-n}. \end{aligned}$$

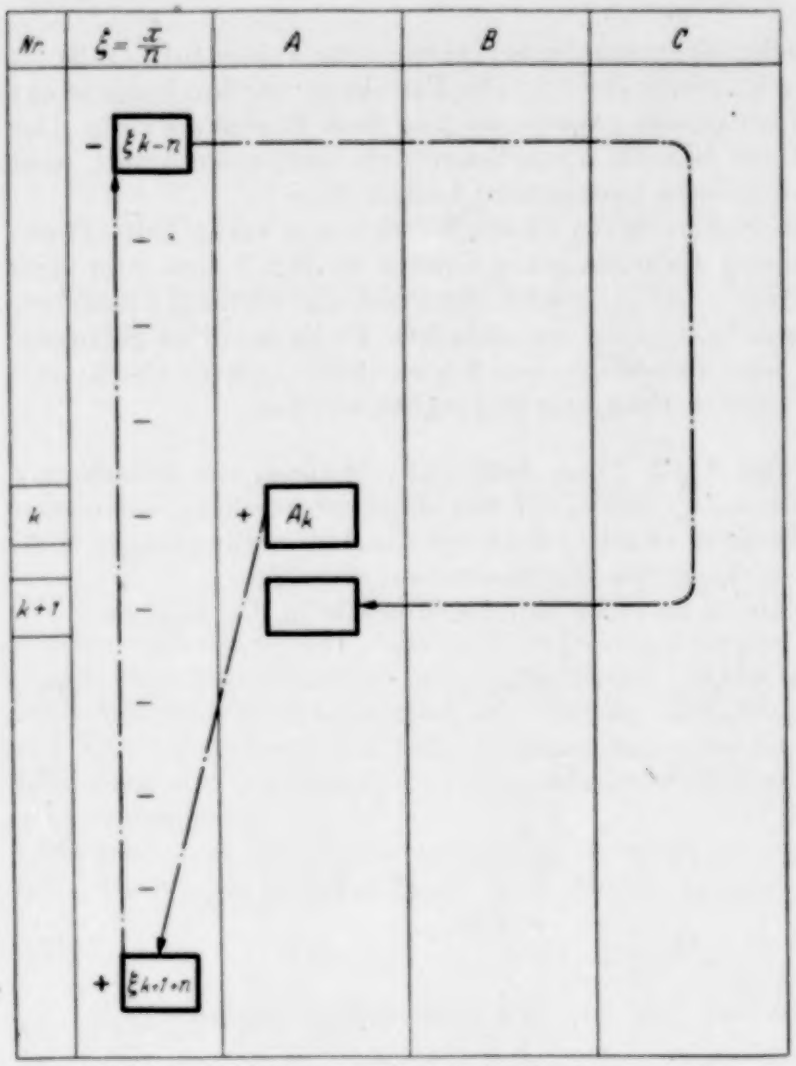

Abb. 7. „Schiebezettel" zur fortlaufenden Berechnung von A_k.

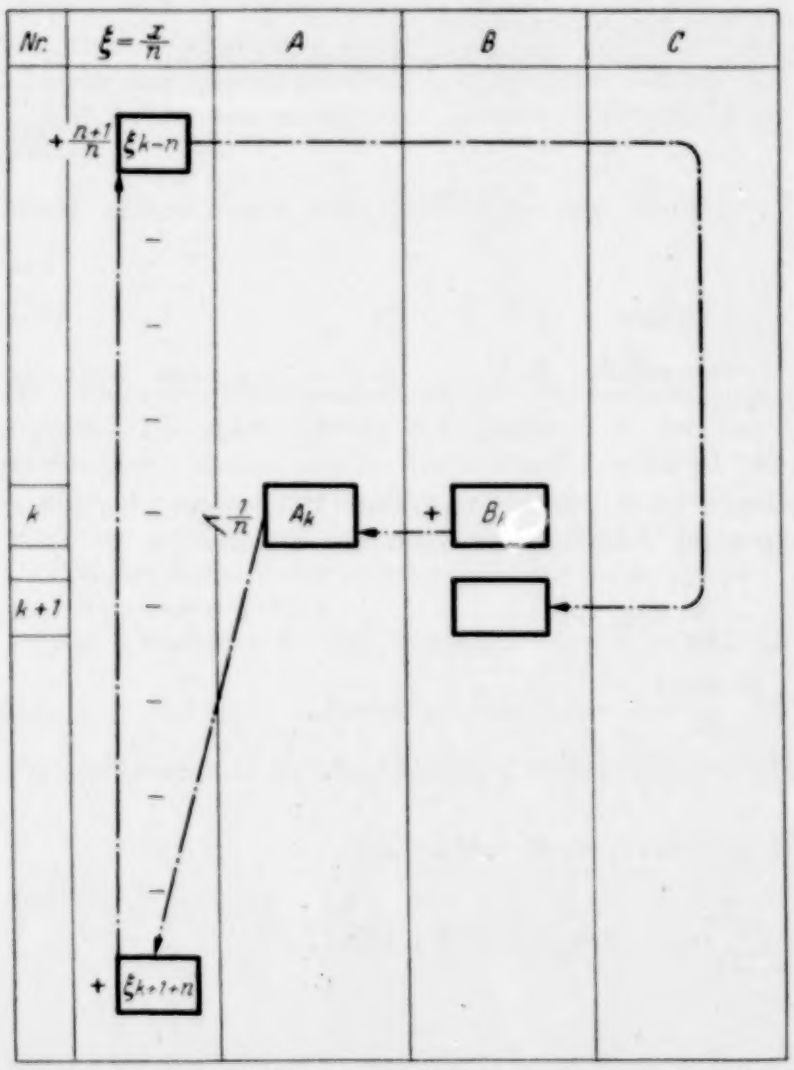

Abb. 8. „Schiebezettel" zur fortlaufenden Berechnung von B_k.

Die ersten beiden Summanden der rechten Seite lassen sich gemäß (34) und (32_4) durch $n\,B_k$ und $-A_k$ ersetzen. Also gilt zur Berechnung der Werte B die Rekursionsformel

$$\left.\begin{aligned} B_{k+1} = B_k - \frac{1}{n}\,A_k + \xi_{k+1+n} + \\ + \frac{n+1}{n}\,\xi_{k-n}\,. \end{aligned}\right\} \quad (36_2)$$

Für C findet man entsprechend aus (32_4)

$$n^2\,C_{k+1} = \sum_{\nu=-n}^{+n} \nu^2\,\xi_{k+1+\nu}\,,$$

oder mit $\nu + 1 = \varepsilon$,

$$\begin{aligned} n^2 C_{k+1} &= \sum_{\varepsilon=-n+1}^{n+1} (\varepsilon-1)^2\,\xi_{k+\varepsilon} \\ &= \sum_{\varepsilon=-n}^{+n} (\varepsilon-1)^2\,\xi_{k+\varepsilon} + n^2\,\xi_{k+1+n} - \\ &\quad - (n+1)^2\,\xi_{k-n} \\ &= \sum_{\varepsilon=-n}^{+n} \varepsilon^2\,\xi_{k+\varepsilon} - 2\sum_{\varepsilon=-n}^{+n} \varepsilon\,\xi_{k+\varepsilon} + \\ &\quad + \sum_{\varepsilon=-n}^{+n} \xi_{k+\varepsilon} + n^2\,\xi_{k+1+n} - \\ &\quad - (n+1)^2\,\xi_{k-n}\,. \end{aligned}$$

Da wir rechts die ersten drei Summanden durch $n^2 C_k$, $-2n\,B_k$ und A_k ersetzen können, so erhalten wir für C schließlich die Rekursionsformel

$$\left.\begin{aligned} C_{k+1} = C_k - \frac{2}{n}\,B_k + \frac{1}{n^2}\,A_k + \\ + \xi_{k+1+n} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \xi_{k-n}\,. \end{aligned}\right\} \quad (36_3)$$

Bevor man das Verfahren mit Hilfe der Rekursionsformeln in Gang setzen kann, hat man am Anfang natürlich je einen Wert A, B und C aus den Gleichungen (32_4) und (34) durch Addition von je N Summanden zu berechnen. Dann findet man die folgenden Werte A, B und C fortlaufend mit Hilfe der in Abb. 7 bis 9 dargestellten „Schiebezettel", deren Verwendung wohl ohne weitere Erläuterung klar ist. Besonders bequem sind alle drei Rekursionsformeln für $n = 10$ bzw. $N = 21$ Punkte, so daß man diesen Wert bevorzugen wird, sofern nicht andere Gründe dagegen sprechen.

Entsprechend zu (32_2) finden wir für die Ableitung $\bar{x}_k^{\cdot}$ aus (15_1) zu-

nächst $D_1'\ a_1 = S_2\ a_1 = X_1$, oder mit (5_2) und (26_1),

$$\ddot{\bar{x}}_k = \frac{1}{n\tau}\,\beta_n'\,B_k\,, \qquad (37_1)$$

wobei

$$\beta_n' = \frac{3\,n^2}{(n+1)(2\,n+1)} \qquad (37_2)$$

und B_k durch (34) gegeben ist.

Für die zweite Ableitung erhält man aus (5_3) und (12_1)

$$\dddot{\bar{x}}_k = \frac{2}{\tau^2}\,\frac{1}{D_2}\,(-S_2\,X_0 + S_0\,X_2)\,.$$

Mit (26_1) und (26_2) wird daraus

$$\dddot{\bar{x}}_k = \frac{2}{(n\tau)^2}\,(\alpha_n''\,A_k + \gamma_n''\,C_k), \qquad (38_1)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned}\alpha_n'' &= -\frac{15\,n^3}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\\ &= \gamma_n\,,\end{aligned}\right\} \qquad (38_2)$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma_n'' &= \frac{45\,n^4}{(n+1)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\\ &= -3\,\frac{n}{n+1}\,\gamma_n\end{aligned}\right\} \qquad (38_3)$$

und A_k und C_k durch (32_4) bestimmt sind.

Mit wachsendem n streben die Faktoren α_n usw. ganz bestimmten Grenzwerten zu, und zwar gilt für $n \to \infty$ nach (33), (37_2), (38_2) und (38_3)

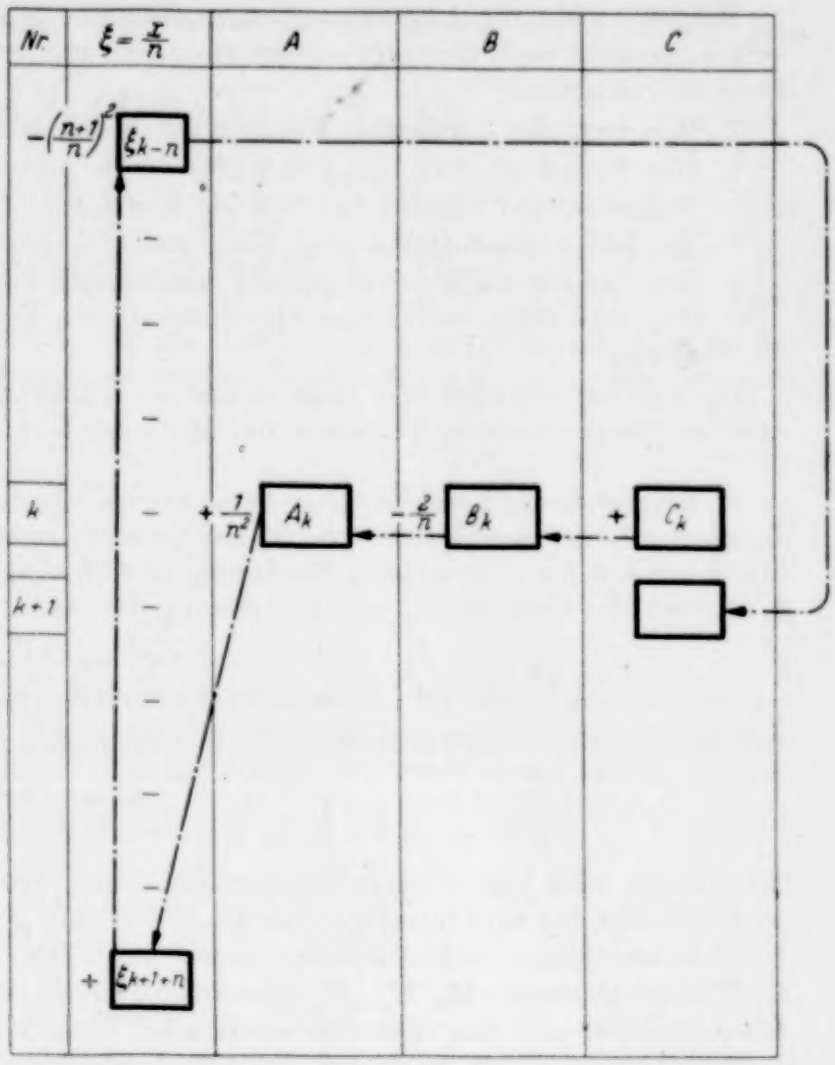

Abb. 9. „Schiebezettel" zur fortlaufenden Berechnung von C_k.

$$\left.\begin{aligned}\alpha_\infty &= +\frac{9}{8}\,, \quad & \gamma_\infty &= -\frac{15}{8}\,,\\ \beta_\infty' &= +\frac{3}{2}\\ \alpha_\infty'' &= -\frac{15}{8}\,, \quad & \gamma_\infty'' &= +\frac{45}{8}\,.\end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Die folgende Zahlentafel ist für die Rechnung nützlich.

	Funktionswert	Zweite Ableitung		Erste Ableitung
n	α_n	$\gamma_n = \alpha_n''$	γ_n''	β_n'
1	+1,0	−1,0	+1,5	+0,5
2	+0,971 429	−1,142 857	+2,285 714	+0,800 000
3	1,000 000	285 714	892 857	964 286
4	021 645	385 281	3,324 675	1,066 667
5	037 296	456 876	642 191	136 364
6	048 951	510 490	884 116	186 813
7	057 919	552 036	4,074 095	225 000
8	065 015	585 139	227 038	254 902
9	070 765	612 119	352 720	278 947
10	+1,075 515	−1,634 521	+4,457 785	+1,298 701
⋮				
∞	1,125	−1,875	5,625	1,5
	$+\frac{9}{8}$	$-\frac{15}{8}$	$+\frac{45}{8}$	$+\frac{3}{2}$

Das Verfahren zur Auswertung langer Meßreihen, bei denen man nicht nur den Funktionswert $\bar{x}$, sondern auch die erste und zweite Ableitung braucht, besteht demnach im wesentlichen aus vier Schritten:

1. Man teilt die gegebenen Werte x durch n und hat damit die ξ-Werte.
2. Man berechnet nach (32_4) und (34) durch Addition von je $N=2n+1$ Summanden die Ausgangswerte für die Summen A, B und C.
3. Die Rekursionsformeln (36_1), (36_2) und (36_3) geben fortlaufend A_k, B_k und C_k.
4. Den geglätteten Wert $\bar{x}_k$ und die Ableitungen $\bar{x}_k^{\cdot}$ und $\bar{x}_k^{\cdot\cdot}$ findet man schließlich aus (32_2), (37_1) und (38_1), wobei man die erforderlichen Faktoren a_n usw. aus der Zahlentafel entnimmt.

Der hier beschriebene Weg führt wesentlich schneller zum Ziel als das in den vorausgehenden Abschnitten geschilderte Verfahren mit Hilfe der Gewichte λ_ν, λ'_ν und λ''_ν.

9. Asymptotische Formeln für große n. Die im Abschnitt **7** und **8** gegebene allgemeine Lösung für quadratisches Ausgleichen ($R=2$) hat verhältnismäßig einfache Gestalt. Für größere Werte von R werden die allgemeinen Ausdrücke in Abhängigkeit von n jedoch immer unhandlicher. Z. B. sind die Gewichte λ'_ν zur Berechnung der Ableitung $\bar{x}^{\cdot}$ im Falle $r=2$

$$\left(\lambda'_\nu\right)_{R=3;4} = \frac{5\left[5\nu(3n^4+6n^3-3n+1)-7\nu^3(3n^2+3n-1)\right]}{n(n+1)(2n+1)(4n^4+8n^3-7n^2-11n+6)}\,, \qquad (40_1)$$

und die Formel für die dazugehörige Fehlerfortpflanzung ist

$$\left(\frac{\bar{\mu}'}{\mu}\,n\right)_{R=3;4} = 5\sqrt{\frac{n(3n^4+6n^3-3n+1)}{(n+1)(2n+1)(4n^4+8n^3-7n^2-11n+6)}}\,. \qquad (40_2)$$

Bereits hier wird jede Gesetzmäßigkeit durch die verwickelte Gestalt der allgemeinen Lösung verdeckt, und das wird in steigendem Maße der Fall, je größer R gewählt wird. Für die Zwecke der Zahlenrechnung steht natürlich nichts im Wege, die in Frage kommenden Gewichte λ_ν, λ'_ν, λ''_ν, ihre Momente M_α, M'_α, M''_α usw. für die ersten Werte von n (etwa bis $n\approx 10$) einmal für alle auszurechnen[1]. Aus später zu erörternden Gründen wollen wir jedoch davon absehen. Wir beschränken uns darauf zu zeigen, daß über Fehlerfortpflanzung und Fälschung auch bei höherer Ordnung R der Ausgleichfunktion noch allgemeine Aussagen gemacht werden können. Das ist deshalb möglich, weil gemäß (20_3), (21_2) und (22_2) nicht nur die Ausdrücke $\Sigma\lambda_\nu^2$, $\Sigma\lambda_\nu'^2$ und $\Sigma\lambda_\nu''^2$, sondern auch die Momente M_α, M'_α und M''_α als Quotienten von endlichen Potenzreihen in n erscheinen, und daß für „große" Werte von n allein die ersten Glieder dieser Entwicklung nach Potenzen von n maßgebend sind. Das haben im übrigen die Gleichungen (29_1) und (31_1) bis (31_3) in Verbindung mit Abb. 3 bis 5 für $R=2$ bereits bestätigt.

Um jetzt zu diesen allgemeinen Formeln zu gelangen, müssen wir natürlich einen andern Weg als im Abschnitt **7** gehen. Wir wählen als Ausgangspunkt die Entwicklung[2] der Summen $S_\alpha(n)$ nach Potenzen von n

$$\frac{1}{2}S_\alpha = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{1}{2}n^\alpha + \frac{1}{2}B_2\binom{\alpha}{1}n^{\alpha-1} + \frac{1}{4}B_4\binom{\alpha}{3}n^{\alpha-3} + \frac{1}{6}B_6\binom{\alpha}{5}n^{\alpha-5} + \cdots, \qquad (41_1)$$

wobei die Faktoren

$$B_2 = +\frac{1}{6}\,;\ B_4 = -\frac{1}{30}\,;\ B_6 = +\frac{1}{42}\,;\ B_8 = -\frac{1}{30}\,;\ B_{10} = +\frac{5}{66}\,;\ \ldots \qquad (41_2)$$

die *Bernoulli*schen Zahlen sind[3]. In (26_1) sind die ersten Glieder dieser Entwicklung jeweils angedeutet. Die Summe S_α besitzt demnach in bezug auf n die Ordnung $\alpha+1$.

Damit lassen sich nun auch in den Fällen $R=3, 4, \ldots$ die kennzeichnenden Determinanten des Systems (8_1) einfach abschätzen. Entwickelt man z. B. D_3 gemäß (19_1) nach den Elementen der ersten Spalte,

$$D_3 = S_0(S_4S_8-S_6^2) - S_2(S_2S_8-S_4S_6) + S_4(S_2S_6-S_4^2)\,, \qquad (42_1)$$

so sieht man zunächst, daß alle in der Entwicklung vorkommenden Summanden $S_\alpha S_\beta S_\gamma$ die

---

[1] Die Gewichte λ_ν für $R=(4,5)$ und $2\leqq n\leqq 10$ sind berechnet bei *Whittacker* und *Robinson*, a. a. O. S. 296.

[2] *Fr. A. Willers*, a. a. O. S. 128.

[3] *K. Knopp*, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, S. 182. Berlin 1924.

gleiche Ordnung $\alpha+\beta+\gamma+3=15$ in bezug auf n besitzen. Wir dürfen also D_3, das mit (41_1) die Gestalt

$$D_3 = 2^3 \begin{vmatrix} n^0\left(\frac{n}{1}+\frac{1}{2}\right) & n^2\left(\frac{n}{3}+\frac{1}{2}+\cdots\right) & n^4\left(\frac{n}{5}+\frac{1}{2}+\cdots\right) \\ n^2\left(\frac{n}{3}+\frac{1}{2}+\cdots\right) & n^4\left(\frac{n}{5}+\frac{1}{2}+\cdots\right) & n^6\left(\frac{n}{7}+\frac{1}{2}+\cdots\right) \\ n^4\left(\frac{n}{5}+\frac{1}{2}+\cdots\right) & n^6\left(\frac{n}{7}+\frac{1}{2}+\cdots\right) & n^8\left(\frac{n}{9}+\frac{1}{2}+\cdots\right) \end{vmatrix} \qquad (42_2)$$

annimmt, näherungsweise berechnen, indem wir die durch Punkte angedeuteten Glieder der Ordnung n^{-1}, n^{-2}, ... nicht erst im Endergebnis, sondern bereits in der Determinante vernachlässigen. Dann wird in erster Näherung

$$D_3 \approx 2^3 n^{12} \begin{vmatrix} \frac{n}{1}+\frac{1}{2} & \frac{n}{3}+\frac{1}{2} & \frac{n}{5}+\frac{1}{2} \\ \frac{n}{3}+\frac{1}{2} & \frac{n}{5}+\frac{1}{2} & \frac{n}{7}+\frac{1}{2} \\ \frac{n}{5}+\frac{1}{2} & \frac{n}{7}+\frac{1}{2} & \frac{n}{9}+\frac{1}{2} \end{vmatrix} . \qquad (42_3)$$

Zur Berechnung wählen wir einen Weg, der sich leicht verallgemeinern läßt und auch noch bei größeren Werten von R zum Ziel führt. Wir lassen die Elemente der ersten Spalte ungeändert und addieren sie zu den mit -1 multiplizierten Elementen der zweiten und dritten Spalte. Dann kommt

$$D_3 \approx 2^6 n^{14} \begin{vmatrix} \frac{n}{1}+\frac{1}{2} & \frac{1}{1\cdot 3} & \frac{1}{1\cdot 5} \\ \frac{n}{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{3\cdot 5} & \frac{1}{3\cdot 7} \\ \frac{n}{5}+\frac{1}{2} & \frac{1}{5\cdot 7} & \frac{1}{5\cdot 9} \end{vmatrix} ,$$

oder indem man rechts in zwei Determinanten aufspaltet und einige Faktoren herauszieht,

$$D_3 \approx \frac{2^6 n^{14}}{1\cdot 3\cdot 5} \left\{ n \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \\ 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ 3 & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \\ 5 & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} \end{vmatrix} \right\} .$$

Das gibt schließlich

$$D_3 \approx \frac{2^{10}}{1^1\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 9^1} n^{14}(2n+15) . \qquad (42_4)$$

Damit haben wir zunächst die gesuchte asymptotische Formel für D_3 hergeleitet. Ähnlich finden wir für die Unterdeterminanten der Diagonalglieder von D_3

$$S_4 S_8 - S_6^2 \approx \frac{2^4}{5\cdot 7^2\cdot 9} n^{13}(n+7) , \qquad (43_1)$$

$$S_0 S_8 - S_4^2 \approx \frac{2^6}{1\cdot 5^2\cdot 9} n^9 (n+5) \qquad (43_2)$$

und

$$S_0 S_4 - S_2^2 \approx \frac{2^4}{1\cdot 3^2\cdot 5} n^5 (n+3) . \qquad (43_3)$$

Aus (20_3) und (22_2) findet man demnach als asymptotisches Gesetz für die Fehlerfortpflanzung bei der Berechnung von a_0 und a_2

$$\left(\frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)_{R=4;5} \approx \frac{3\cdot 5}{8}\sqrt{\frac{n+7}{n(2n+15)}} \approx \frac{15}{8}\frac{1}{\sqrt{N}} \qquad (44_1)$$

und

$$\left(n^2\frac{\bar{\mu}''}{\mu}\right)_{R=4;5} \approx \frac{3\cdot 7}{4}\sqrt{5}\sqrt{\frac{n+5}{n(2n+15)}} \approx \frac{21}{4}\sqrt{\frac{5}{N+4}} . \qquad (44_2)$$

Aus (21_2) folgt mit (41_1) und

$$D_2' \approx \frac{2^4}{3 \cdot 5^2 \cdot 7}\, n^9 (n+5) \tag{44$_3$}$$

für den Faktor a_1 schließlich die Fehlerformel

$$\left(n\,\frac{\bar{\mu}'}{\mu}\right)_{R=4;3} \approx \frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{N+2}}\,, \tag{44$_4$}$$

was im übrigen auch unmittelbar aus (40_2) hergeleitet werden kann, wenn man dort den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen nach Potenzen von n entwickelt.

Vergleicht man (29_1) und (29_2) mit (44_1), so findet man für große n

$$\bar{\mu}_{R=5,4} \approx \frac{5}{4}\,\bar{\mu}_{R=3,2} \approx \frac{5}{4}\,\frac{3}{2}\,\bar{\mu}_{R=1,0}\,. \tag{45$_1$}$$

Beim Übergang von $R=(0,1)$ zu $R=(2,3)$ bzw. $R=(4,5)$ multipliziert sich demnach der im Mittel zu erwartende Restfehler $\bar{\mu}$ des geglätteten Wertes $\bar{x}$ mit 3/2 bzw. 15/8. Diese Beziehung wird in Abb. 3 durch die drei Kurven veranschaulicht, während die Vergleichspunkte, welche anfangs über den Kurven liegen, ohne jede Vernachlässigung berechnet worden sind.

Für die Ableitungen findet man aus (44_4), (44_2) und (29_1) die asymptotischen Fehlerformeln

$$\bar{\mu}'_{R=4;3} \approx \frac{5}{2}\,\bar{\mu}'_{R=2;1} \tag{45$_2$}$$

und

$$\bar{\mu}''_{R=5;4} \approx \frac{7}{2}\,\bar{\mu}''_{R=3;2}\,. \tag{45$_3$}$$

Erhöht man die Ordnung der Ausgleichkurve von 1 auf 3 (bzw. 2 auf 4), so multiplizieren sich demnach die Restfehler der ersten (bzw. zweiten) Ableitung mit 5/2 (bzw. 7/2). Das ist im Vergleich zur genauen Rechnung in Abb. 4 und 5 dargestellt. Ersichtlich liefern die asymptotischen Kurven bereits für $n \approx 10$ Ergebnisse, deren Unterschiede von der strengen Lösung nicht mehr von Bedeutung sind.

Zur Beurteilung der Fälschung für $r=2$ benötigen wir gemäß (23_4), (24_2) und (25) die Momente M_6, M_5' und M_6'', die sich nach den Ergebnissen der Abschnitte 3 und 4 in folgender Form schreiben lassen:

$$M_6 = +\frac{1}{D_3}\begin{vmatrix} S_2 & S_4 & S_6 \\ S_4 & S_6 & S_8 \\ S_6 & S_8 & S_{10} \end{vmatrix}, \qquad M_5' = -\frac{1}{D_2'}\begin{vmatrix} S_4 & S_6 \\ S_6 & S_8 \end{vmatrix}$$

und

$$M_6'' = -\frac{1}{D_3}\begin{vmatrix} S_0 & S_4 & S_6 \\ S_2 & S_6 & S_8 \\ S_4 & S_8 & S_{10} \end{vmatrix}.$$

Da die Ermittlung der hier vorkommenden Determinanten ähnlich vor sich geht, wie die eingangs ausführlich geschilderte Berechnung von D_3, so begnügen wir uns mit der Angabe der Ergebnisse. Es wird mit (41_1) und (42_4) schließlich

$$\left.\begin{aligned} M_6 &\approx +\frac{1\cdot3\cdot5}{7\cdot9\cdot11}\,n^6\,\frac{2n+21}{2n+15}\,, \\ M_5' &\approx -\frac{3\cdot5}{7\cdot9}\,n^4\,\frac{n+7}{n+5}\,, \\ M_6'' &\approx -\frac{5}{11}\,n^4\,\frac{2n+19}{2n+15}\,. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Setzt man diese Ausdrücke in (23_4), (24_2) und (25) ein, so erhält man als Fälschung der Funktion und ihrer ersten beiden Ableitungen beim Ausgleichen mit einer Potenzreihe vierten Grades für große n

$$\left.\begin{aligned} (\bar{x}_{0*} - x_{0*})_{R=4;5} &\approx \frac{1\cdot3\cdot5}{7\cdot9\cdot11}\,\frac{1}{6!}\,x_{0*}^{(6)}\,(n\tau)^6\,\frac{2n+21}{2n+15}\,, \\ (\bar{\dot{x}}_{0*} - \dot{x}_{0*})_{R=4;3} &\approx -\frac{3\cdot5}{7\cdot9}\,\frac{1}{5!}\,x_{0*}^{(5)}\,(n\tau)^4\,\frac{n+7}{n+5}\,, \\ (\bar{\ddot{x}}_{0*} - \ddot{x}_{0*})_{R=4;5} &\approx -\frac{5}{11}\,\frac{2}{6!}\,x_{0*}^{(6)}\,(n\tau)^4\,\frac{2n+19}{2n+15}\,. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Die mathematischen Fehler sind also bei festem Bereich $B=n\tau$ unter sonst gleichen Verhältnissen (nahezu) unabhängig von der Punktzahl n.

Damit haben wir gezeigt, daß für Fehlerfortpflanzung und Fälschung auch bei Verwendung von Potenzreihen höheren Grades einfache Beziehungen hergeleitet werden können.

Durch das Ausgleichen soll in erster Linie der Einfluß des Meßfehlers μ auf die Ergebnisse herabgedrückt werden. Betrachtet man unter diesem Gesichtspunkt an Hand von Abb. 3 die Potenzfunktionen wachsender Ordnung, so sieht man, daß eine Herabsetzung von μ auf $0{,}1\,\mu$, d. h. eine Steigerung der ursprünglichen Meßgenauigkeit auf mathematischem Wege um eine Zehnerpotenz, praktisch ausgeschlossen ist. Man müßte dazu je nach der Ordnung der benutzten Ausgleichfunktion

$$N_{0,1} \approx 100\,, \qquad N_{2,3} \approx \left(\frac{3}{2}\right)^2 100 \approx 225, \qquad N_{4,5} \approx \left(\frac{15}{8}\right)^2 100 \approx 350$$

Punkte abschnittsweise zusammenfassen. Das geht sicher weit über das tragbare Maß an Rechenarbeit hinaus, abgesehen davon, daß man wohl niemals so viele Meßpunkte zur Verfügung hat. Praktisch durchführbar erscheint eine Herabsetzung des physikalischen Fehlers μ auf $\mu/3$. Das erfordert jeweils

$$N_{0,1} \approx 9\,, \quad N_{2,3} \approx 21\,, \quad N_{4,5} \approx 32$$

Punkte. Der dazu nötige Aufwand erscheint tragbar. Da er beim linearen Glätten weitaus am geringsten ist, so wird man zunächst versuchen, damit auszukommen. Man kann dabei die mit dem geradlinigen Ausgleichen verbundene Fälschung der Funktion

$$(\bar{x}_{0*} - x_{0*})_{R=0,1} \approx \frac{1}{3}\,\frac{1}{2!}\,\ddot{x}_{0*}\,(n\tau)^2\left(1+\frac{1}{n}\right) \tag{48}$$

zunächst ruhig in Kauf nehmen, auch wenn sie entgegen unserer eingangs aufgestellten Forderung das Mehrfache des Restfehlers $\bar{\mu}$ beträgt. Man muß die Fälschung nur nach dem Glätten wieder beseitigen, indem man sie an den Werten $\bar{x}_0$ als Verbesserung anbringt. Übersteigt der mathematische Fehler (48) jedoch das zulässige Maß, so wird man von vornherein mit Hilfe einer Parabel ausgleichen und gegebenenfalls die dabei entstehende Fälschung (31_1)

$$(\bar{x}_{0*} - x_{0*})_{R=2;3} \approx -\frac{1\cdot 3}{5\cdot 7}\,\frac{1}{4!}\,x^{(4)}_{0*}\,(n\tau)^4\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

im Endergebnis berücksichtigen. Über $R=2{,}3$ hinauszugehen, ist wegen der wachsenden Rechenarbeit und wegen des ungünstigen Verhaltens bei der Fehlerfortpflanzung nicht ratsam. Es ist aber auch gar nicht notwendig, da die Restfälschung der Funktion beim „quadratischen Glätten mit anschließender Verbesserung des mathematischen Fehlers" (31_1) erst von der sechsten Ableitung $x_0^{(6)}$ der Funktion wesentlich beeinflußt wird. Diese Ableitung spielt aber bei Erfahrungsfunktionen entweder keine Rolle mehr, oder sie läßt sich überhaupt nicht mit hinreichender Sicherheit ermitteln. Bei allen praktisch vorliegenden Aufgaben wird man also abschnittweise mit einer Ausgleichfunktion vom Grade $R \leqq 2$ auskommen. Dabei bedient man sich zur Auswertung langer Meßreihen im Falle $R=2$ des im Abschnitt 8 erläuterten Verfahrens.

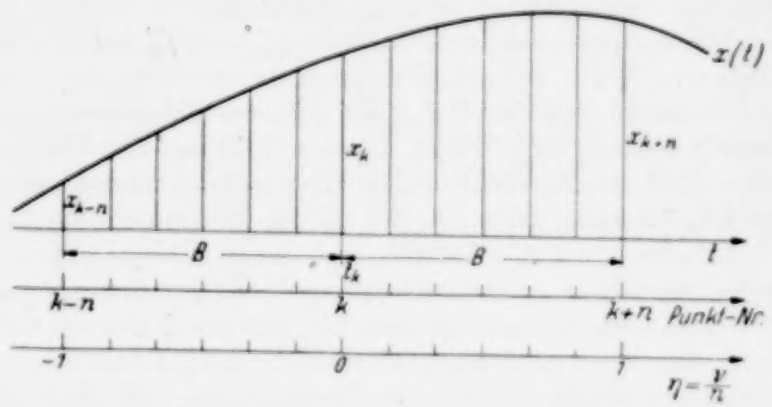

Abb. 10. Zur Veranschaulichung des Grenzübergangs zu unendlich großer Punktzahl $n \to \infty$ in einem festen Bereich $B = n\tau$.

10. Grenzübergang zu unendlich großer Punktzahl $n \to \infty$ für $R=2$. Wir gehen von der im Abschnitt 8 gegebenen Gestalt der Lösung aus und setzen dort zur Abkürzung (Abb. 10)

$$\frac{\nu}{n} = \eta \quad \text{bzw.} \quad \Delta\eta = \frac{\Delta\nu}{n} = \frac{1}{n}\,. \tag{49$_1$}$$

Aus (32_4) und (34) wird dann

$$A_k = \sum_{\eta=-1}^{+1} x_{k+\nu}\,\Delta\eta\,, \qquad B_k = \sum_{\eta=-1}^{+1} \eta\, x_{k+\nu}\,\Delta\eta\,, \qquad C_k = \sum_{\eta=-1}^{+1} \eta^2\, x_{k+\nu}\,\Delta\eta\,. \tag{49$_2$}$$

Lassen wir jetzt bei festem Bereich $B=n\tau$ die Zahl der Meßpunkte unbegrenzt wachsen, so gilt auf Grund der letzten Gleichungen

$$\lim_{n\to\infty} A_k = \int_{-1}^{+1} x\,d\eta = 2J_{0k}, \qquad \lim_{n\to\infty} B_k = \int_{-1}^{+1} \eta x\,d\eta = 2J_{1k}, \qquad \lim_{n\to\infty} C_k = \int_{-1}^{+1} \eta^2 x\,d\eta = 2J_{2k}. \tag{49_3}$$

Bezeichnen wir in üblicher Weise die Integrale, denen A_k, B_k und C_k für $n\to\infty$ zustreben, mit $2J_{0k}$, $2J_{1k}$ und $2J_{2k}$, so nimmt die Grenzlösung nach (32_2), (37_1) und (38_1) mit Rücksicht auf (39) die Gestalt an

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_k &= \frac{3}{4}(3J_{0k}-5J_{2k}), \\ \dot{\bar{x}}_k &= \frac{1}{B}3J_{1k}, \\ \ddot{\bar{x}}_k &= \frac{2}{B^2}\frac{15}{4}(-J_{0k}+3J_{2k}). \end{aligned}\right\} \tag{49_4}$$

Das sind die bekannten Gleichungen[1] für das Glätten einer nicht durch Einzelpunkte, sondern „fortlaufend" gegebenen Kurve $x(t)$. Die Integrale (49_3) muß man im allgemeinen mit Hilfe numerischer Näherungsverfahren berechnen, indem man aus der unendlich dichten Punktfolge der Meßlinie eine bestimmte endliche Anzahl von Einzelpunkten auswählt. Es ist infolgedessen zweckmäßiger, von vornherein auf die im Abschnitt 8 gegebene Form der Lösung zurückzugreifen, welche für endliche Punktzahlen gültig ist.

11. Zusammenfassung. Glättet man eine Reihe von fehlerbehafteten Meßwerten x fortlaufend, indem man abschnittsweise durch je $2n+1=N$ Punkte x_{k-n}, x_k, ... x_{k+n} die „beste" Gerade, Parabel ... legt, so gelten für genügend große Punktzahlen N bei fester Bereichlänge $2B=2n\tau=$konst die folgenden Fehlergesetze.

a) Bei beliebiger, aber fester Ordnung R der Ausgleichfunktion und veränderlicher Punktzahl N: Die physikalischen Fehler f_P der geglätteten Werte $\bar{x}$ und f'_P und f''_P ihrer Ableitungen $\dot{\bar{x}}$ und $\ddot{\bar{x}}$ sind bei unveränderlicher Bereichlänge $2B$ in erster Näherung dem Kehrwert $1/\sqrt{N}$ der Wurzel aus der Gesamtpunktzahl N verhältnisgleich.

Die mathematischen Fehler f_M, f'_M und f''_M sind bei fester Bereichlänge $2B$ nahezu unabhängig von der Punktzahl N.

b) Bei fester Gesamtpunktzahl N und veränderlicher Ordnung R der Ausgleichfunktion: Die physikalischen Fehler f_P, f'_P und f''_P multiplizieren sich beim Übergang zu einer Ausgleichfunktion anderer Ordnung bei fester Bereichlänge $2B$ mit Faktoren, welche in erster Näherung von der Punktzahl N unabhängig sind.

Die mathematischen Fehler f_M, f'_M und f''_M nehmen bei fester Bereichlänge $2B$ mit steigender Ordnung R der Ausgleichfunktion ab.

Während sich für $R\leqq 3$ die genauen Fehlerformeln ohne allzu große Mühe aufstellen lassen, muß man sich für größere Werte von R mit der Herleitung asymptotischer Formeln begnügen. Obwohl diese Formeln in der Entwicklung nach Potenzen von n nur die ersten beiden Glieder berücksichtigen, geben sie für „nicht zu kleine" Punktzahlen $N\gg R$ eine gute Näherung.

Da die Ausgleichfunktionen höherer Ordnung den Einfluß des Meßfehlers μ der Ausgangswerte nur dann in ausreichendem Maße herabsetzen, wenn man außerordentlich große Punktzahlen zusammenfaßt, so sind sie „praktisch unbrauchbar". Im allgemeinen wird man sich mit einer Geraden oder einer Parabel begnügen müssen, wenn der Rechenaufwand nicht ins Ungemessene wachsen soll. Die Beschränkung auf $R\leqq 2$ ist aber kein Nachteil, wenn man berücksichtigt, daß man die dabei entstehenden mathematischen Fehler f_M, ... nach dem Glätten wieder beseitigen kann, indem man die „gefälschten Werte" um entsprechende Beträge verbessert.

Für $R=2$ wird ein „Rekursionsverfahren" angegeben, welches zur fortlaufenden Auswertung langer Meßreihen viel geeigneter als der sonst übliche Weg des Glättens mit Hilfe der Gewichte λ_ν, λ'_ν und λ''_ν ist.

---

[1] *Willers*, a. a. O. S. 254 und 255. Gl. (16) auf S. 254 enthält einen Druckfehler und heißt richtig $2J_0=\int_{-1}^{+1} y\,dt$.

(Eingegangen am 27. September 1947.)

Der zylindrische Schalenstreifen oberhalb der Beulgrenze.

Von **T. E. Schunck** in Karlsruhe.

1. Einleitung: Stand der Erkenntnis. Um Gewicht zu sparen, werden im Leichtbau die Blechfelder von Schalenkonstruktionen manchmal über ihre Knickgrenze für Schub oder Druck hinaus beansprucht. Man geht dabei mit der Belastung etwa bis zum Fünffachen der Knicklast. Die Schwierigkeit für die Berechnung solcher überkritisch beanspruchter, ausgebeulter Blechfelder liegt vor allem darin, daß die Ausbiegungen des Bleches aus seiner ursprünglichen Lage so groß werden, daß ihre Quadrate nicht mehr gegen die linearen Glieder der Verformungen vernachlässigt werden dürfen. Die Verfahren der üblichen linearisierten Elastizitätstheorie reichen somit nicht mehr aus; sie liefern bekanntlich nur die Knicklast und lassen die Amplitude der Ausbeulung unbestimmt.

Folgendes ist über die Berechnung solcher überkritisch beanspruchten Bleche bekannt, bei der vor allem Felder mit überwiegender Schubbelastung interessieren, der aber auch eine Normalspannung überlagert sein kann.

H. Wagner überwand die oben umrissene Schwierigkeit in seiner Theorie des idealen Zugfeldes[1] damit, daß er für große Überschreitung der Knicklast eines auf Schub beanspruchten Blechfeldes den Biegewiderstand des gefalteten Bleches vernachlässigte. Es bleibt dann im Blech ein einachsiger Spannungszustand mit einer Zugspannung in Richtung der Falten, die Hauptspannung ist. Diese Spannung beansprucht die Randversteifungen, an denen das Blechfeld befestigt ist, auf Biegung und in Richtung ihrer Längsachse. Versuche von *Lahde* und *Wagner*[2] zeigten, daß die Ergebnisse dieser Theorie des idealen Zugfeldes die Grenzwerte für das tatsächliche Verhalten des Blechfeldes darstellen, daß aber insbesondere die Überspannungen in den Versteifungen auch bei großer Überschreitung der Knicklast doch noch beträchtlich unter diesen Grenzwerten bleiben.

Um diese Abweichungen zu vermeiden und einen stetigen Übergang an der Beulgrenze zu erhalten, wurde die *Wagner*sche Zugfeldtheorie über das „vollständige Zugfeld“[3] zum „unvollständigen Zugfeld“[4] durch *H. Schapitz* erweitert. Beim vollständigen Zugfeld wird die zweite Hauptspannung, die *Wagner* Null setzt, unabhängig von der Größe der Belastung und vom Ort gleich der Knickschubspannung gesetzt; beim unvollständigen Zugfeld geht diese zweite Hauptspannung stetig von der Spannung im Randträger auf den Wert der Knickschubspannung über, den sie in der Mitte des Blechfeldes erreicht. Durch geeignete Wahl der Konstanten in der im übrigen willkürlich angenommenen Übergangsfunktion können die Ergebnisse der Theorie mit denen der Versuche zur Übereinstimmung gebracht werden.

Während der Zugfeldtheorie ein Zustand zugrunde liegt, der erst bei unendlich großer Überschreitung der kritischen Belastung erreicht wird, gehen *Marguerre* und *Trefftz* in ihrer Untersuchung über die Tragfähigkeit eines längsbelasteten Plattenstreifens nach Überschreiten der Beullast[5] von der Annahme aus, daß die Beulform im Augenblick des Ausknickens — die Eigenfunktion der linearisierten Theorie — auch nach Überschreiten der Beullast erhalten bleibt und sich nur ihre Amplitude mit wachsender Last ändert. Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen läßt sich dann die Tangente an die wirkliche Belastungs-Formänderungs-Kurve im kritischen Punkt berechnen.

In einer späteren Arbeit[6] erweitert *Marguerre* für den gedrückten, gelenkig gelagerten Plattenstreifen den Ansatz für die Ausbeulordinaten in eine Form, die der experimentell beobachteten besser entspricht. In diesem Ansatz werden drei Parameter nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen jeweils so bestimmt, daß sie die Formänderungsarbeit zu einem Minimum machen; damit lassen sich auch stärkere Veränderungen der Ausbeulform mit der Belastung mathema-

---

[1] *H. Wagner*, Jbch. wiss. Ges. für Luftfahrt 1928, S. 113 und Z. Flugtechn. Motorluftsch. 20 (1929) S. 200, 227, 256, 279, 306.
[2] *R. Lahde* und *H. Wagner*, Luftfahrtforsch. 13 (1936) S. 262.
[3] *E. Schapitz*, Jbch. 1936 Lilienthal-Ges. f. Luftfahrtforsch., S. 94.
[4] *E. Schapitz*, Luftfahrtforsch. 14 (1937) S. 129 und Ztschr. V.D.I. 86 (1942) S. 497.
[5] *K. Marguerre* und *E. Trefftz*, Z. angew. Math. Mech. 17 (1937) S. 85.
[6] *K. Marguerre*, Luftfahrtforsch. 14 (1937) S. 121.

tisch berücksichtigen. Außerdem ist in diesem Aufsatz ein kritischer Vergleich mit vorhergehenden Arbeiten von *Schnadel*[1], *Cox*[2], *Yamamoto-Kondo*[3] und *Timoshenko*[4] über die Berechnung ausgebeulter Platten enthalten.

Schließlich berechneten *Kromm* und *Marguerre* das Verhalten eines von Schub- und Druckkräften beanspruchten ebenen Plattenstreifens, der gelenkig gelagert ist, oberhalb der Beulgrenze für die beiden Grenzfälle starrer und verschwindender Querabstützung[5]. Der hierbei angewandte *Ritz*-Ansatz für die Normalverschiebung ist gegenüber den bisherigen Arbeiten insofern wesentlich verbessert, als außer der Amplitude auch die Wellenlänge und die Faltenrichtung als mit der Beullast veränderlich angesetzt werden. Für die beiden oben erwähnten Grenzfälle der Querabstützung wird je ein Nomogramm angegeben, das die gesuchten elastischen Größen für eine gegebene äußere Belastung zu ermitteln gestattet.

Die folgenden Untersuchungen sollen nun diese bekannten Rechnungsunterlagen ergänzen. Hierzu eignet sich vor allem die energetische Methode in der Form, wie sie *Marguerre* in seiner Theorie der gekrümmten Platte großer Formänderung[6] benutzt. Sie werde deshalb im nächsten Abschnitt kurz dargestellt. Auf dieser Grundlage soll ein gekrümmter, gelenkig gelagerter Streifen unter kombinierter Druck- und Schubbeanspruchung in der gleichen Weise durchgerechnet werden, wie dies *Kromm* und *Marguerre* für den ebenen Streifen getan haben.

2. Die Theorie der gekrümmten Platte großer Formänderung. *Marguerre* kommt a. a. O. auf folgendem Weg zu den Differentialgleichungen für das elastische Verhalten schwach gekrümmter Schalen bei großen Durchbiegungen: Die unverformte Gestalt der Schalenmittelfläche sei in rechtwinkligen Koordinaten x und y durch die Funktion $W(x,y)$ — im Sonderfall des Zylinders durch $W(y)$ — gegeben (Abb. 1). Als schwach gekrümmt werde eine Schale bezeichnet, für welche die Produkte der Ableitungen von W nach den Koordinaten gegenüber 1 vernachlässigbar klein sind. Dann ist es möglich, an Stelle der natürlichen Koordinaten der Schale wie bei einer Platte die kartesischen beizubehalten; die schwach gekrümmte Schale wird als vorgekrümmte Platte behandelt.

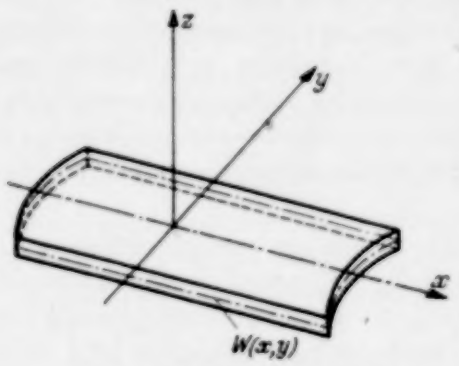

Abb. 1. Die untersuchte Schale mit Koordinatensystem.

Sind $\mathfrak{e}_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3$) die drei Einheitsvektoren in den Achsenrichtungen, so ist ein Punkt der unverformten Schale im Abstand z von der Mittelfläche durch den Ortsvektor

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{e}_1 + y\mathfrak{e}_2 + (z + W)\mathfrak{e}_3 \tag{2.01}$$

gegeben. Unter der Annahme, daß bei der Verbiegung der Schale die zur z-Achse parallelen Geraden in den Schnitten $x = \text{const}$. und $y = \text{const}$. Gerade bleiben und daß sie ihren ursprünglichen Winkel mit der Schalenmittelfläche beibehalten, geht der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ bei einer Verschiebung der Schalenmittelfläche um

$$\mathfrak{u} = u\mathfrak{e}_1 + v\mathfrak{e}_2 + w\mathfrak{e}_3 \tag{2.02}$$

in

$$\mathfrak{R} = \left(x + u - z\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathfrak{e}_1 + \left(y + v - z\frac{\partial w}{\partial y}\right)\mathfrak{e}_2 + (z + W + w)\,\mathfrak{e}_3 \tag{2.03}$$

über. Von den in diesem Ausdruck vorkommenden Größen sollen in Erweiterung der linearisierten Theorie um einen Schritt von der Ausbiegung w alle Glieder bis zur zweiten Ordnung einschließlich beibehalten, die höherer Ordnung aber nach wie vor vernachlässigt werden, während auch oberhalb der Stabilitätsgrenze die Verschiebungen u und v vorerst so klein bleiben, daß man wie in der linearisierten Theorie schon die Glieder zweiter Ordnung weglassen darf; das Gleiche war bereits oben für W vorausgesetzt worden.

Unter diesen Voraussetzungen erhält man für die Dehnungen ε_x^* und ε_y^* in den Koordinaten-

---

[1] *G. Schnadel*, Verh. 3. Int. Kongr. Techn. Mech. Stockholm, Bd. 3, S. 73.

[2] *H. L. Cox*, ARC Rep. and Mem. Nr. 1554.

[3] *M. Yamamoto* und *K. Kondo*, Rep. Aeron. Res. Inst. Tokyo Nr. 119.

[4] *S. Timoshenko*, Theory of elastic stability, S. 390 ff. New York 1936.

[5] *A. Kromm* und *K. Marguerre*, Luftfahrtforsch. 14 (1937) S. 627.

[6] *K. Marguerre*, Proc. 5th Int. Congr. Appl. Mech. Cambridge, Mass. 1939, S. 93.

richtungen, die als Verhältnis der Längenänderung eines Elements zur ursprünglichen Länge dieses Elements definiert sind:

$$\varepsilon_x^* = \frac{\left|\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} dx\right| - \left|\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial x} dx\right|}{\left|\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial x} dx\right|} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{2.04}$$

$$\varepsilon_y^* = \frac{\left|\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y} dy\right| - \left|\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial y} dy\right|}{\left|\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial y} dy\right|} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{2.05}$$

und für die Gleitung γ^*, das ist die Abnahme des nahezu rechten Winkels ϱ zwischen den Ortsvektoren $\partial\mathfrak{r}/\partial x$ und $\partial\mathfrak{r}/\partial y$, aus

$$\cos(\varrho - \gamma^*) = \frac{\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y}}{\left|\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x}\right| \left|\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y}\right|} \tag{2.06}$$

den Wert

$$\gamma^* = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \tag{2.07}$$

Die wesentliche Hypothese der *Marguerre*schen Theorie besteht nun darin, die Formänderungsarbeit A_i für die gekrümmte Platte in den Invarianten $(\varepsilon_x^* + \varepsilon_y^*)$ und $(\varepsilon_x^* \varepsilon_y^* - \frac{1}{4}\gamma^{*2})$ des Verzerrungstensors ebenso anzusetzen, wie sie sich in der Elastizitätstheorie für zweidimensionale Probleme ergibt, das heißt

$$A_i = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \iiint \left[(\varepsilon_x^* + \varepsilon_y^*)^2 - 2(1-\nu)\left(\varepsilon_x^* \varepsilon_y^* - \frac{\gamma^{*2}}{4}\right)\right] dx\,dy\,dz, \tag{2.08}$$

wobei E der Elastizitätsmodul und ν die Querkontraktionszahl bedeuten und das Integral über die ganze Schale zu erstrecken ist.

Bezeichnen wir die Dehnungen und die Gleitung für die Mittelfläche, d. h. für $z=0$, mit ε_x, ε_y und γ und integrieren nach z über die als konstant vorausgesetzte Schalenstärke h, so wird die Formänderungsenergie, ausgedrückt in den Verzerrungen der Mittelfläche und den Durchbiegungen,

$$\left.\begin{aligned} A_i = {} & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint \left[(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 - 2(1-\nu)\left(\varepsilon_x \varepsilon_y - \frac{\gamma^2}{4}\right)\right] dx\,dy + \\ & + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \iint \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\right\} dx\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{2.09}$$

Das erste Integral stellt die Dehnungsenergie, das zweite die Biegungsenergie dar. Beide sind über die Schalenmittelfläche zu nehmen.

In Anlehnung an das *Hooke*sche Gesetz des ebenen Spannungszustandes definiert *Marguerre* nun weiter unter Einführung des Schubmoduls G durch

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \tag{2.10}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \tag{2.11}$$

und

$$\tau = G\gamma \tag{2.12}$$

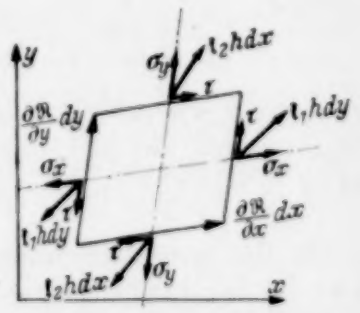

Abb. 2. Kräfte und Spannungen am verformten Element der Schalenmittelfläche.

sogenannte „schiefe Spannungen“[1]. Sie entstehen dadurch, daß man die am verformten Flächenelement (Abb. 2) angreifenden Elementarkräfte $\mathfrak{t}_1 h dy$ und $\mathfrak{t}_2 h dx$ in Komponenten $\sigma_x h dy\, \partial\mathfrak{R}/\partial x$ usw. zerlegt. Sie werden also auf die Tangentenvektoren $\partial\mathfrak{R}/\partial x$ und $\partial\mathfrak{R}/\partial y$, nicht etwa auf die Einheitsvektoren in Tangentenrichtung bezogen, und ihre Wirkungslinie ist parallel zu den Kanten des deformierten Flächenelements.

[1] Vgl. auch *W. Flügge*, Ing.-Arch. 3 (1932) S. 471.

Der Unterschied zwischen diesen schiefen und den gebräuchlichen, auf ein rechtwinkliges System bezogenen Spannungen ist bei den folgenden Untersuchungen klein, da sowohl der Betrag der Tangentenvektoren $\partial\mathfrak{R}/\partial x$ und $\partial\mathfrak{R}/\partial y$ wegen der Kleinheit der Dehnungen annähernd gleich 1 ist als auch der von ihnen eingeschlossenen Winkel $(\varrho-\gamma^*)$ nach den Gleichungen (2.06/7) sich bei kleinen Gleitungen nicht viel von einem rechten unterscheidet. Nach den von *Flügge*[1] abgeleiteten Umrechnungsformeln können unter diesen Umständen die schiefen Spannungen als gute Näherung für die üblichen Normalspannungen benutzt werden. Dies gilt insbesondere am Rand der Schale, wo die Ausbiegung w verschwindet. Wir wollen im folgenden von dieser Näherung Gebrauch machen.

Die gesuchten Gleichgewichtsbedingungen erhält man mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen, wonach im Gleichgewichtszustand

$$\delta(A_i + V) = 0 \tag{2.13}$$

sein muß. Denken wir uns die Randverschiebungen vorgegeben und die Plattenfläche selbst frei von äußeren Lasten, was in den im folgenden zu behandelnden Fällen zutrifft, so verschwindet die Variation des Potentials V der äußeren Kräfte. Die Variation von A_i nach u, v und w liefert in Verbindung mit den Beziehungen (2.10) bis (2.12) die drei Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0\,, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0\,, \tag{2.15}$$

$$\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)}\,\Delta\Delta w - \sigma_x\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \sigma_y\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - 2\,\tau\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right) = 0\,. \tag{2.16}$$

Die beiden ersten werden durch Spannungen befriedigt, die sich aus einer Spannungsfunktion Φ gemäß

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\,, \tag{2.17}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\,, \tag{2.18}$$

$$\tau = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} \tag{2.19}$$

ableiten lassen. Die dritte lautet dann

$$\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)}\,\Delta\Delta w - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + 2\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right) = 0. \tag{2.20}$$

Die Spannungsfunktion muß der Gleichung

$$\frac{1}{E}\,\Delta\Delta\Phi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\,\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.21}$$

gehorchen. Diese Gleichung erhält man dadurch, daß man in die Beziehungen (2.10) bis (2.12) die Spannungen aus (2.17) bis (2.19) und die Dehnungen der Mittelfläche [das sind die Ausdrücke (2.04/5) und (2.07) mit $z=0$] einsetzt und dann die Verschiebungen u und v eliminiert.

3. Die Grundgleichungen. Die in Ziff. 2 dargelegte Theorie erlaubt es, den durch Schub- und Normalkräfte belasteten sehr langen Schalenstreifen schwacher Krümmung zu berechnen. Sehr lang sei ein Schalenstreifen dann genannt, wenn die Randbedingungen an den Schmalseiten für die Knicklast und die Beulfunktion zu vernachlässigen sind. Dies ist praktisch bei nicht allzu großen Abständen der mit dem Blech verbundenen Querstützen erfüllt; in einem für Druck- und Schubbelastung exakt nachgeprüften Sonderfall[2] z. B. schon bei einem Seitenverhältnis des Blechfeldes von 1 : 3,3. Für einen solchen sehr langen Streifen tritt an Stelle der Randbedingungen an den Schmalseiten die Forderung, daß die Lösungen in der Längsrichtung periodisch sein müssen, wobei die Periode klein gegenüber der Länge des Streifens ist.

---

[1] *W. Flügge*, Statik und Dynamik der Schalen, Ziff. I, 4. Berlin 1934.

[2] *T. E. Schunck*, Ing.-Arch. 4 (1933) S. 405.

Der zu untersuchende kreiszylindrische Streifen mit dem Krümmungsradius R und der Blechstärke h (Abb. 3) habe die „große" Länge a in Richtung der Zylinderachse (x-Achse) und die im Verhältnis zu R kleine Breite b (R/b mindestens 3 bis 4) in y-Richtung, wobei die y-Achse die zur x-Richtung senkrechte Tangente an den Zylinder im Mittelpunkt der Schalenmittelfläche ist. Die Funktion W lautet dafür

$$W = -\frac{y^2}{2R}. \tag{3.01}$$

Das Feld soll unter einer Schubbeanspruchung stehen, die bei nicht-eckensteifen Gurten im Blech eine Schubspannung erzeugt, und unter einer Druckkraft P_x in x-Richtung, die von den Längsträgern mit der gesamten Querschnittsfläche F_t und dem Blech gemeinsam aufgenommen wird. Ist die mittlere Druckspannung des Blechs in x-Richtung p_1 und im Längsträger p_t, so muß

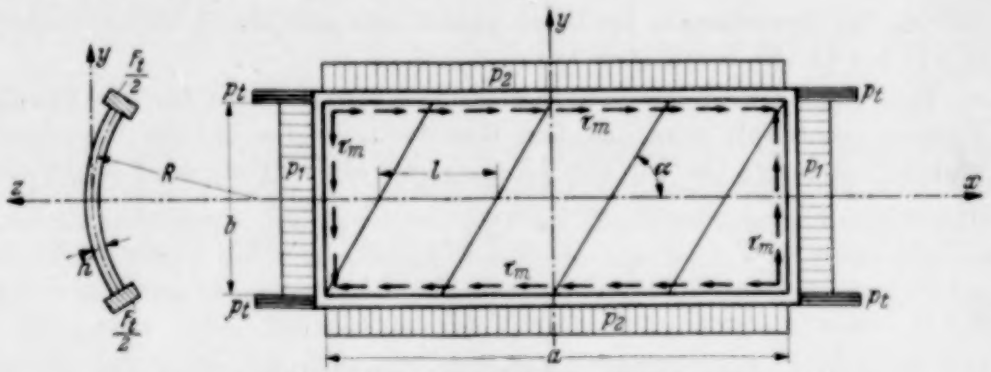

Abb. 3. Der untersuchte Schalenstreifen.

$$P_x = p_1 hb + p_t F_t \tag{3.02}$$

sein.

Unter dem Einfluß der in der y-Richtung vorhandenen mittleren Blechspannung p_2 werden sich die Längsträger je nach der Steifigkeit der Querstützen mehr oder weniger nähern. Die mittlere Annäherung sei ε_2, das heißt die Verschiebung der Längsträger in y-Richtung $\pm\varepsilon_2 \frac{b}{2}$. Um die Zahl der unabhängigen Veränderlichen des Problems zu vermindern, beschränken wir uns auf die Untersuchung der beiden Grenzfälle:

Vollkommen nachgiebige Querstützen, d. h. $p_2 = 0$,
und vollkommen steife Querstützen, d. h. $\varepsilon_2 = 0$,

wie dies *Kromm* und *Marguerre* in ihrer entsprechenden Untersuchung des ebenen Streifens getan haben. Ihr schließen wir uns im Rechnungsgang an, um die durch die Krümmung bedingten Zusatzglieder klar hervortreten zu lassen. Denn das Ziel soll sein, die Funktionen $p_1 = p_1(p_t, \tau_m)$ und $\dot{\gamma} = \gamma(p_t, \tau_m)$, welche die genannten Autoren für das ebene Blech angegeben haben, für ein Blech gegebener konstanter Krümmung aufzustellen, das an biegesteifen Längsträgern gelenkig gelagert ist.

Demgemäß machen wir für die Ausbiegung den *Ritz*-Ansatz

$$w = f \cos\frac{\pi y}{b} \cos\frac{\pi}{l}(x - my), \tag{3.03}$$

in dem die Amplitude f, die in der x-Richtung gemessene Wellenlänge $l = \lambda b$ und der Faltenwinkel $\alpha = \operatorname{arccotg} m$ Freiwerte sind. Diese werden nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen so bestimmt werden, daß die Formänderungsarbeit A_i ein Minimum wird. Hierzu muß man vorher die im Energieintegral (2.09) noch vorhandenen Verschiebungen u und v durch bekannte Größen und w ersetzen. Dies ist auf dem Wege über die Spannungsfunktion Φ möglich, die bei dem angenommenen w die Verträglichkeitsgleichung (2.21)

$$\Delta\Delta\Phi = -\frac{\pi^4 f^2 E}{2b^2 l^2}\left[\cos\frac{2\pi y}{b} + \cos\frac{2\pi}{l}(x - my) + \frac{2b^2}{\pi^2 f R}\cos\frac{\pi y}{b}\cos\frac{\pi}{l}(x - my)\right] \tag{3.04}$$

erfüllen muß.

Die allgemeine Lösung Φ dieser Differentialgleichung setzt sich zusammen aus einem partikulären Integral der vollständigen Gleichung

$$\left.\begin{aligned}\Phi_P = -E\frac{f^2}{32}\Bigg[&\frac{l^2}{b^2(1+m^2)^2}\cos\frac{2\pi}{l}(x - my) + \frac{b^2}{l^2}\cos\frac{2\pi y}{b}\Bigg] - \\ &- \frac{Efl^2}{2\pi^2 R[1+(\lambda+m)^2]^2}\cos\left[\pi(\lambda+m)\frac{y}{l} - \frac{\pi x}{l}\right] - \\ &- \frac{Efl^2}{2\pi^2 R[1+(\lambda-m)^2]^2}\cos\left[\pi(\lambda-m)\frac{y}{l} + \frac{\pi x}{l}\right]\end{aligned}\right\} \tag{3.05}$$

und einer Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta\Delta\,\Phi_h = 0\,, \tag{3.06}$$

die wir zu

$$\Phi_h = -\frac{c_1}{2}\,y^2 - \frac{c_2}{2}\,x^2 - c_3\,x\,y + \text{ in } x \text{ periodische Funktionen} \tag{3.07}$$

ansetzen wollen. Bei diesem Ansatz werden die Konstanten c_1 bis c_3 den Mittelwerten p_1, p_2 und τ_m der Spannungen im Blech gleich, wie man durch Differentiieren gemäß den Gleichungen (2.17) bis (2.19) bestätigen kann.

Den Zusammenhang zwischen diesen Mittelwerten für die Spannungen und denen für die Dehnungen erhält man aus den Randbedingungen für die Verschiebungen u und v in der x- und y-Richtung. Da wir die Längsträger als biegungssteif angenommen hatten, lauten diese

$$\bar{u}\left(x;\,\pm\frac{b}{2}\right) = -\varepsilon_1\,x \pm \gamma\,\frac{b}{2}\,. \tag{3.08}$$

$$\bar{v}\left(x;\,\pm\frac{b}{2}\right) = \mp\,\varepsilon_2\,\frac{b}{2}\,. \tag{3.09}$$

Die Verschiebungen selbst erhält man durch Integration der mit $z=0$ aus (2.04/5 und 07). (2.10 bis 12) und (2.17 bis 19) folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \nu\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \nu\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{y}{R}\,\frac{\partial w}{\partial y}\,. \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2(1+\nu)}{E}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{y}{R}\,\frac{\partial w}{\partial x}\,. \tag{3.12}$$

in die man mit dem Ansatz (3.03) für w und der vollständigen Lösung $\Phi = \Phi_h + \Phi_p$ der Gleichung (3.04) eingeht, zu

$$\left.\begin{aligned} u = -\frac{1}{E}\left[(p_1 - \nu p_2)\,x - 2(1+\nu)\,\tau_m\,y\right] - \frac{\pi^2 f^2}{8\,l^2}\left(x - 2\,m\,y - \frac{m\,b}{\pi}\,\sin\frac{2\,\pi\,y}{b}\right) + \\ + \text{ in } x \text{ periodische Funktionen.} \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

$$\left.\begin{aligned} v = -\frac{1}{E}\,(p_2 - \nu p_1)\,y - \frac{\pi^2 f^2}{8\,l^2}\left[(\lambda^2 + m^2)\,y - \frac{\lambda\,l}{2\,\pi}\,(1 - m^2 - \nu)\,\sin\frac{2\,\pi\,y}{b}\right] + \\ + \text{ in } x \text{ periodische Funktionen.} \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Geht man hiermit in die Randbedingungen (3.08/9) ein, so erhält man für den gesuchten Zusammenhang zwischen den Mittelwerten der Spannungen und der Dehnungen:

$$E\,\varepsilon_1 = p_1 - \nu p_2 + E\,\frac{\pi^2 f^2}{8\,l^2}\,, \tag{3.15}$$

$$E\,\varepsilon_2 = p_2 - \nu p_1 + E\,\frac{\pi^2 f^2}{8\,l^2}\,(\lambda^2 + m^2)\,. \tag{3.16}$$

$$G\,\gamma = \tau_m + G\,\frac{\pi^2 f^2 m}{4\,l^2}\,. \tag{3.17}$$

Die periodischen Anteile der Lösung Φ_h der homogenen Gleichung, die sich diesen Mittelwerten neben den periodischen Anteilen des Partikulärintegrals überlagern, sollen dagegen vernachlässigt werden, wie dies *Kromm* und *Marguerre* auch bei dem ebenen Streifen getan haben; das heißt, wir wollen annehmen, daß sich der Randeinfluß nur in einer sehr schmalen, für das Verhalten des ganzen Streifens unwesentlichen Zone auswirkt[1].

Mit den Werten (3.13) und (3.14) für u und v und dem Ansatz (3.03) für w berechnet sich die Formänderungsarbeit nach (2.09) zu

$$\left.\begin{aligned} A_i = a\,b\,h\left\{\frac{\pi^4 E f^4}{256\,b^4}\left[\frac{1}{(1+m^2)^2} + \frac{1}{\lambda^4}\right] + \frac{1}{E}\left[\frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} - \nu\,p_1\,p_2 + (1+\nu)\,\tau_m^2\right] + \right. \\ \left. + \frac{\pi^4 E f^2 h^2}{96\,(1-\nu^2)\,b^4}\left[\left(\frac{1+m^2+\lambda^2}{\lambda^2}\right)^2 + 4\,\frac{m^2}{\lambda^2}\right] + \frac{E f^2}{16\,R^2}\left[\frac{1}{[1+(\lambda+m)^2]^2} + \frac{1}{[1+(\lambda-m)^2]^2}\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

[1] Diese Vermutung wäre noch durch Vergleich der damit gewonnenen Ergebnisse mit Versuchswerten oder solchen aus einer exakten Rechnung zu bestätigen.

Bei der Integration nach x sind dabei von den periodischen Funktionen nur die Mittelwerte beibehalten, das sich diesen überlagernde periodische Glied des unbestimmten Integrals, dessen relative Größe vom Verhältnis der Wellenlänge l zum Integrationsintervall a abhängt, aber vernachlässigt worden, da nach der eingangs gemachten Voraussetzung $l \ll a$ sein soll; so ist z. B.

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \sin^2 \frac{\pi x}{l}\, dx = \frac{a}{2}\left[1 - \frac{l}{\pi a}\sin\left(\frac{\pi a}{l}\right)\right] \approx \frac{a}{2} \tag{3.19}$$

gesetzt worden.

Die Formänderungsarbeit ist durch die Gleichung (3.18) in Abhängigkeit von der relativen Wellenlänge $\lambda = l/b$, dem Faltenwinkel arccotg m und der Beulamplitude f sowie den mittleren Blechspannungen p_1, p_2 und τ_m dargestellt. Für gegebene mittlere Blechspannungen nehmen die Freiwerte λ, m und f nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen solche Werte an, daß das elastische Potential, das unter den hier vorliegenden Voraussetzungen gleich der Formänderungsarbeit ist, ein absolutes Minimum wird. Hierzu müssen $\partial A_i/\partial\lambda$ und $\partial A_i/\partial m$ sowie $\partial A_i/\partial f$ verschwinden. Die drei daraus folgenden Gleichungen legen die Freiwerte bei gegebenen mittleren Spannungen fest. Sie gestatten jedoch nicht, die Freiwerte in expliziter Form hinzuschreiben. Für die Anwendung löst man sie deshalb nach den Spannungen auf.

Vorher seien noch folgende Abkürzungen eingeführt:

Die Knicklast des ebenen Streifens unter reinem Längsdruck

$$p^* = \frac{\pi^2 E h^2}{3(1-\nu^2)b^2}$$

und als dimensionslose, stets positive Kenngröße für die Krümmung der Schale ein Krümmungsmaß

$$\varkappa = \frac{E b^2}{p^* \pi^2 R^2} = \frac{3(1-\nu^2)}{\pi^4}\left(\frac{b}{R}\right)^2\left(\frac{b}{h}\right)^2. \tag{3.20}$$

sowie als Kenngröße für die Beulamplitude

$$F = \frac{E}{p^*}\,\frac{\pi^2 f^2}{16 b^2} = \frac{3(1-\nu^2)}{16}\left(\frac{f}{h}\right)^2. \tag{3.21}$$

Damit folgt aus den oben genannten Minimalbedingungen:

$$\begin{aligned}\frac{p_1}{p^*} = {} & F\,\frac{(1+m^2)^3 + m^2\lambda^2(1+m^2+2\lambda^2)}{\lambda^2(1+m^2)^3} + \frac{1+m^2+\lambda^2}{4\lambda^4}\left[2\lambda^2 - m^2(1+m^2-3\lambda^2)\right] - \\ & - \frac{m^2}{\lambda^2}(1+m^2+2\lambda^2) + \frac{\varkappa}{2}\left\{\frac{2\lambda^2(2m^2+\lambda^2+3m\lambda)+m^2(1+m^2-\lambda^2)}{[1+(\lambda+m)^2]^3} + \right. \\ & \left. + \frac{2\lambda^2(2m^2+\lambda^2-3m\lambda)+m^2(1+m^2-\lambda^2)}{[1+(\lambda-m)^2]^3}\right\},\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\frac{p_2}{p^*} = \frac{F}{(1+m^2)^2} - \frac{(1+m^2+\lambda^2)(1+m^2-\lambda^2)}{4\lambda^4} + \frac{\varkappa(1+m^2-\lambda^2)}{2}\left\{\frac{1}{[1+(\lambda+m)^2]^3} + \frac{1}{[1+(\lambda-m)^2]^3}\right\}, \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}\frac{\tau_m}{p^*} = {} & - F\,\frac{m(1+m^2+\lambda^2)}{(1+m^2)^3} + \frac{m}{2\lambda^2}\left[1+m^2+3\lambda^2 + \frac{(1+m^2+\lambda^2)(1+m^2-\lambda^2)}{2\lambda^2}\right] - \\ & - \frac{\varkappa}{2}\left\{\frac{2\lambda^2(\lambda+m)+m(1+m^2-\lambda^2)}{[1+(\lambda+m)^2]^3} - \frac{2\lambda^2(\lambda-m)-m(1+m^2-\lambda^2)}{[1+(\lambda-m)^2]^3}\right\}.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Diese Werte berechnet man als Funktion der Parameter.

Bevor wir dies für den allgemeinen Fall des ausgebeulten Bleches mit einem gegebenen Krümmungsmaß tun werden, wollen wir erst die Werte an der Knickgrenze für reinen Schub und Axialdruck bestimmen. Hierzu brauchen wir in den Gleichungen (3.22 bis 3.24) nur die Beulamplitude $F = 0$ zu setzen.

4. Schubknickung. Im Falle reiner Schubbelastung des Streifens verschwinden an der Knickgrenze auch p_1 und p_2. Die beiden Gleichungen (3.22/23) bestimmen die beiden Freiwerte m_k und λ_k im kritischen Punkt, womit man die kritische Schubspannung aus der Gleichung (3.24) erhält, in der man $F = 0$ zu setzen hat.

Bei $p_2 = F = 0$ ist die Gleichung (3.23) sowohl erfüllt, wenn

$$\frac{1+m_k^2+\lambda_k^2}{2\,\lambda_k^4} = \varkappa \left\{ \frac{1}{[1+(\lambda_k+m_k)^2]^3} + \frac{1}{[1+(\lambda_k-m_k)^2]^3} \right\} \tag{4.01}$$

oder wenn unabhängig vom Krümmungsmaß

$$\lambda_k^2 = 1 + m_k^2 \tag{4.02}$$

ist. Mit der zuletzt genannten Bedingung vereinfacht sich die Gleichung (3.22) mit $p_1 = F = 0$ zu

$$(3 - 2\,\lambda_k^2)\left(1 + \frac{\varkappa}{4}\right) = 0\,, \tag{4.03}$$

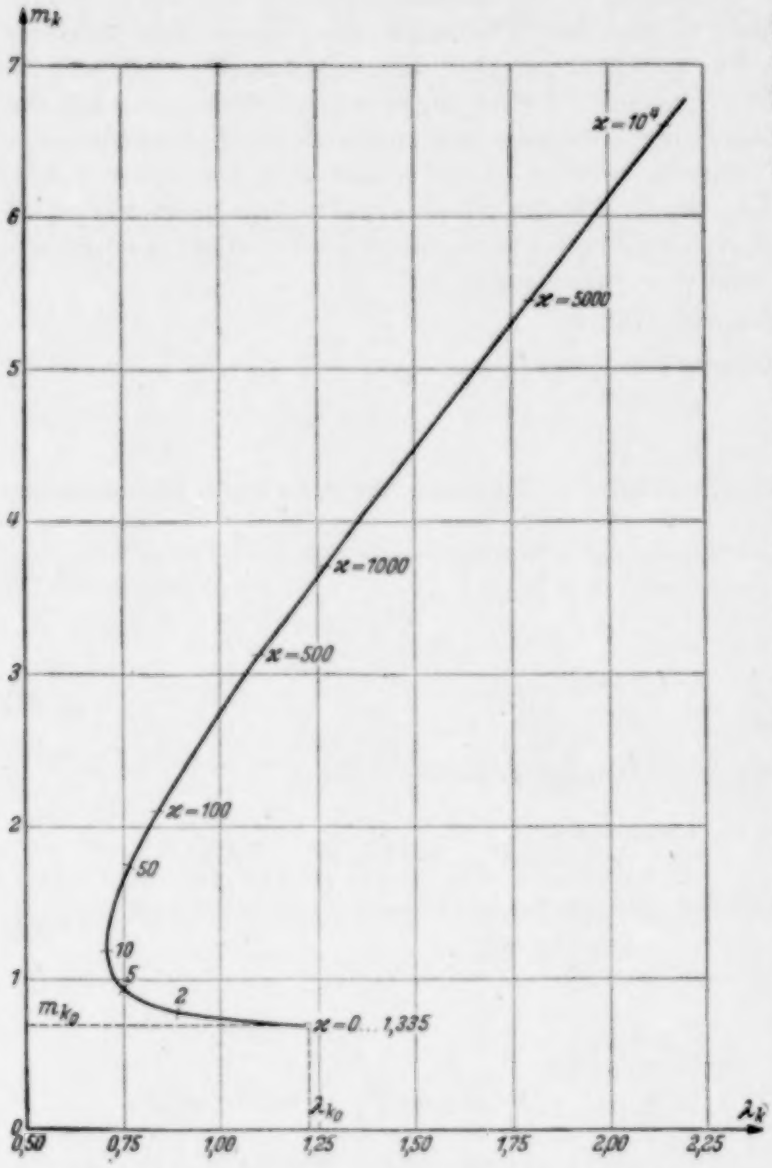

Abb. 4. Zusammengehörige Werte des Faltenwinkels ($\alpha_k = \operatorname{arccotg} m_k$) und der relativen Wellenlänge λ_k am kritischen Punkt für reine Schubknickung bei Änderung des Krümmungsmaßes $\varkappa$.

was wegen $\varkappa \geqq 0$ nur mit $\lambda_{k0} = \sqrt{1{,}5}$ befriedigt werden kann. Knickwellenlänge und Faltenwinkel ($m_{k0} = 0{,}707$) stimmen in diesem Fall mit den Werten für den ebenen Streifen überein. Mit ihnen folgt für die kritische Schubspannung

$$\frac{\tau_{k0}}{p^*} = \sqrt{2} + \frac{\varkappa}{4}\sqrt{2}\,. \tag{4.04}$$

Es muß nunmehr geprüft werden, ob dies der tiefste Eigenwert ist oder ob derjenige noch tiefer liegt, der zu dem Wertepaar (m_k, λ_k) gehört, das die Gleichungen (3.22) und (4.01) befriedigt. Die zusammengehörigen Werte von m_k und λ_k sind in Abb. 4 aufgezeichnet und einige Krümmungsmaße angeschrieben. Die Kurve endet bei dem Paar (m_{k0}, λ_{k0}) des ebenen Streifens; das hierzugehörige Krümmungsmaß ist $\varkappa_{\min} = 1{,}335$. Für kleinere Krümmungsmaße sind die Gleichungen (3.22) und (4.01) mit reellen, positiven Werten von m und λ nicht zu befriedigen. Der nur äußerst schwach gekrümmte Streifen knickt also mit dem Faltenwinkel und der Wellenlänge des ebenen aus, wobei sich die Knickspannung aus (4.04) ergibt. Überschreitet das Krümmungsmaß den Wert $\varkappa_{\min}$, so gehört der niedrigere Eigenwert zu dem Wertepaar (m_k, λ_k) nach Abb. 4 und ist damit und mit $F = 0$ aus (3.24) zu berechnen. Die so ermittelte kritische Schubspannung gibt Abb. 5 in Abhängigkeit vom Krümmungsmaß an. Man beachte den starken Anstieg der Knickschubspannung bei kleinen Krümmungen. Die Werte stimmen sehr gut mit den von *Legett*[1] berechneten überein.

5. Druckknickung. Während der kritische Wert der Schubspannung von der Steifigkeit der Querstützen unabhängig ist, hängt die axiale Druckspannung, für welche die Schale ausknickt, davon ab. Wir wollen zuerst den Grenzfall verschwindender Steifigkeit untersuchen, setzen also in den Gleichungen (3.22) bis (3.24) $F = 0$, $p_2 = 0$ und $\tau_m = 0$. Aus letzterer Bedingung folgt als einziger physikalisch sinnvoller Wert $m = 0$; damit vereinfacht sich (3.23) zu

$$(\lambda_k^2 - 1)\left[\lambda_k^2 + 1 - 4\,\varkappa\,\frac{\lambda_k^4}{(\lambda_k^2+1)^3}\right] = 0\,. \tag{5.01}$$

[1] *D. M. A. Legett*, Proc. Roy. Soc. Ser. A 908 (1937) S. 62.

Hieraus folgen wiederum verschiedene Wellenlängen, mit denen der Streifen ausknicken kann, nämlich unabhängig vom Krümmungsmaß $\lambda_{k0}=1$ und zwei weitere zueinander reziproke

$$\lambda_{k1,2}=\frac{1}{2}\sqrt[4]{4\varkappa}\pm\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt[2]{\varkappa}-1}\,, \tag{5.02}$$

die nur reell sind, wenn das Krümmungsmaß den Wert $\varkappa_{\min}=4$ überschreitet. Ist dies nicht der Fall, ist das Blech also nur sehr schwach gekrümmt, so kann es allein mit der Wellenlänge $\lambda_{k0}=1$ des ebenen Streifens ausknicken, zu der nach (3.22) eine kritische Längsspannung

$$\frac{(p_{1k})_0}{p^*}=1+\frac{\varkappa}{4} \tag{5.03}$$

gehört.

Übersteigt das Krümmungsmaß die untere Grenze $\varkappa_{\min}=4$, so sind alle drei berechneten Wellenlängen der Beulfunktion möglich. Zu den beiden zueinander reziproken gehört der gleiche Eigenwert

$$\frac{(p_{1k})_{1,2}}{p^*}=\sqrt[2]{\varkappa}\,. \tag{5.04}$$

Die Lösung verzweigt sich demnach bei diesem Eigenwert nicht nur in zwei, sondern in drei Äste. Daß die nicht ausgebeulte Lage instabil ist, ist sicher. Welche der beiden zuletzt ermittelten Ausbeulformen sich jedoch stabil einstellen kann, wird sich später bei der Untersuchung des überkritischen Gebiets ergeben. Daß eine von diesen tatsächlich auftritt und nicht die Wellenlänge $\lambda_{k0}=1$, folgt daraus, daß die zu λ_{k0} gehörige Knickspannung nach (5.03) für $\varkappa>4$ größer als die zu $\lambda_{k1,2}$ nach Gl. (5.04) gehörige ist. An der Übergangsstelle $\varkappa=4$ sind nicht nur beide Knickspannungen, sondern auch die Differentialquotienten $\partial p_{1k}/\partial\varkappa$ gleich.

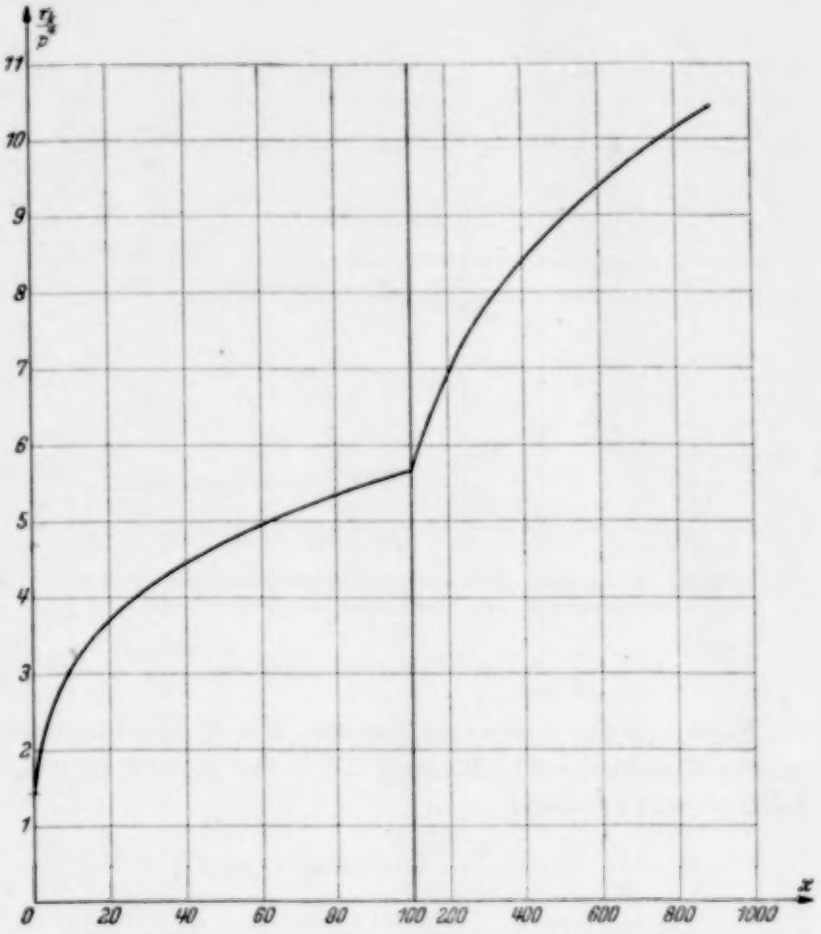

Abb. 5. Relative kritische Schubspannung (τ_k/p^*) als Funktion des Krümmungsmaßes $\varkappa$.

Sind die Querstützen so steif, daß die Längsträger ihren ursprünglichen Abstand beibehalten — dies war der andere der beiden Grenzfälle, die wir allein untersuchen wollten —, so müssen wir mit den Bedingungen $F=0$, $\varepsilon_2=0$ und $\tau_m=0$ in die Hauptgleichungen (3.22) bis (3.24) eingehen.

Verschwindender Schubspannung entspricht wieder $m=0$. Der unveränderliche Abstand der Längsträger verlangt nach (3.16)

$$\frac{p_{2k}}{p^*}=\nu\,\frac{p_{1k}}{p^*}\,. \tag{5.05}$$

Hiermit folgt aus den Gleichungen (3.22) und (3.23) für die Knickwellenlänge λ_k die Beziehung

$$(1+\lambda_k^2)^4\left[1-\lambda_k^2(1-2\,\nu)\right]-4\,\varkappa\,\lambda_k^4(1-\lambda_k^2-2\,\nu\lambda_k^4)=0\,. \tag{5.06}$$

Der hieraus folgende Verlauf der Funktion $\lambda_k^2(\varkappa)$ ist in Abb. 6 angegeben. Auch in diesem Fall kann eine sehr schwach gebogene Schale ($\varkappa<\varkappa_{\min}$) nur mit einer Wellenlänge ausknicken, während eine stärker gebogene ($\varkappa>\varkappa_{\min}$) drei Eigenwerte λ_k^2 besitzt. Zum Beispiel ergeben sich für das Krümmungsmaß $\varkappa=10$, das unmittelbar oberhalb von $\varkappa_{\min}=9{,}98$ liegt, die drei kritischen Wellenlängen $\lambda_{k1}=7{,}76$, $\lambda_{k2}=0{,}632$ und $\lambda_{k3}=0{,}608$, zu denen nach (3.22)

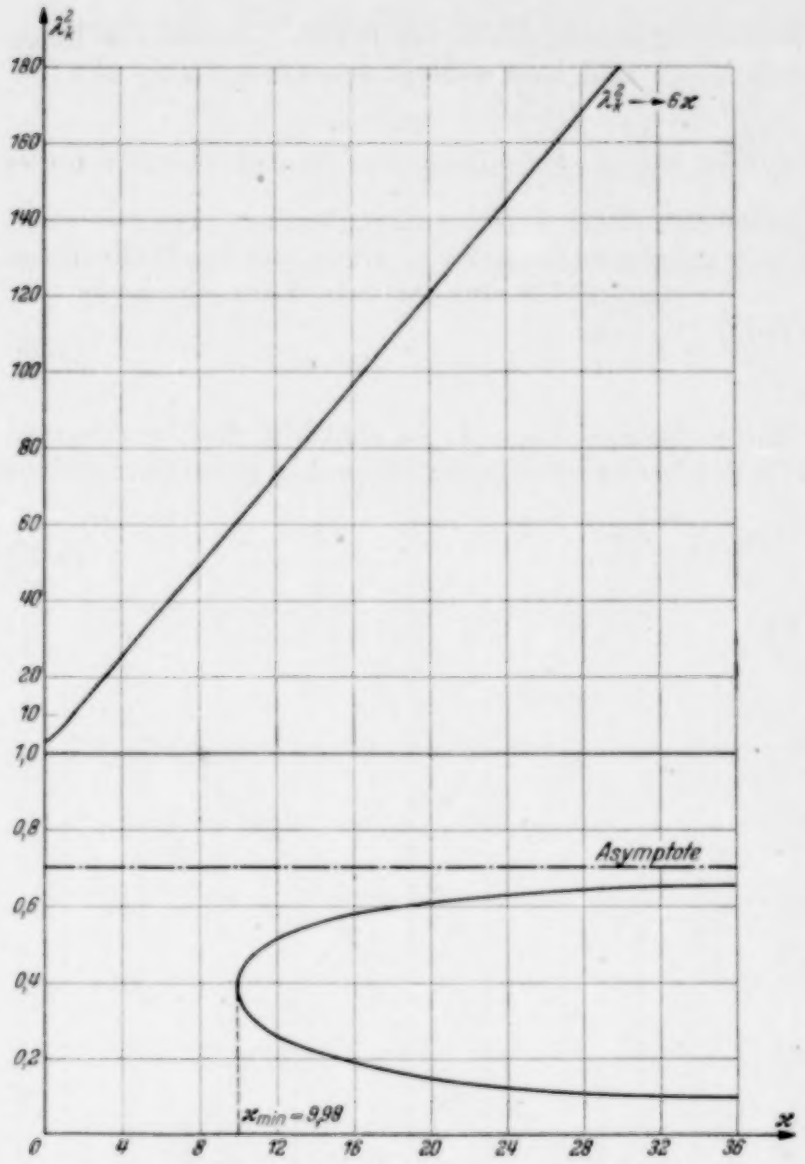

Abb. 6. Abhängigkeit der Wellenlänge am kritischen Punkt λ_k vom Krümmungsmaß $\varkappa$ für Druck bei steifen Querstützen.

die Spannungen $(p_{1k})_1 = 0{,}824\, p^*$ und $(p_{1k})_2 = (p_{1k})_3 = 2{,}916\, p^*$ gehören. Der Streifen wird demnach in diesem Fall mit der langen Welle unter der Spannung $(p_{1k})_1$ ausknicken. Diese ist erheblich niedriger als im Fall weicher Querstützen, da bei starren Querstützen der Querdruck $p_{2k} = \nu p_{1k}$ die Knickneigung des außerdem im Schnitt $x = \text{konst.}$ bereits vorgekrümmten Bleches erhöht. Dies macht sich besonders bei der großen Wellenlänge bemerkbar, da hierbei die Formänderungsarbeit für die Biegung im Schnitt $y = \text{konst.}$ verhältnismäßig klein ist. Diese niedrige Knickspannung kann aber nur auftreten, wenn die Querstützen so weit von einander entfernt sind, daß sich die lange Beulwelle gemäß unserer Voraussetzung im ersten Absatz von Ziff. 3 auch tatsächlich ausbilden kann.

6. Der überkritisch beanspruchte Streifen bei verschwindender Steifigkeit der Querstützen. Die Hauptgleichungen für das Verhalten des überkritisch beanspruchten Streifens sind bereits in Ziff. 3 abgeleitet worden. Bei vollkommen nachgiebigen Querstützen ist $p_2 = 0$. Damit liefert die Gleichung (3.23) die relative Beulamplitude für diesen Grenzfall

$$F' = \frac{1}{2}(1+m^2)^2(1+m^2-\lambda^2)\left\{\frac{1+m^2+\lambda^2}{2\lambda^4} - \varkappa\left[\frac{1}{[1+(\lambda+m)^2]^3} + \frac{1}{[1+[\lambda-m)^2]^3}\right]\right\} \tag{6.01}$$

als Funktion des Krümmungsmaßes, der Wellenlänge und des Faltenwinkels. Geht man hiermit in die Gleichungen (3.22) und (3.24) für p_1 und τ_m ein, so erhält man für die mittlere relative Längsdruckspannung

$$\left.\begin{aligned} p_1' = \frac{p_1}{p^*} = {} & \frac{1+m^2+\lambda^2}{2\lambda^2(1+m^2)}(1+m^2-m^2\lambda^2) - \frac{(1+m^2)^2}{4\lambda^6}\left[\lambda^4-(1+m^2)^2\right] - m^2 + \\ & + \frac{\varkappa}{2\lambda^2(1+m^2)}\left\{\frac{2\lambda^4(1+m^2)(2m^2+\lambda^2+3m\lambda) - (1+m^2-\lambda^2)[(1+m^2)^3+2m^3\lambda^4]}{[1+(\lambda+m)^2]^3} + \right. \\ & \left. + \frac{2\lambda^4(1+m^2)(2m^2+\lambda^2-3m\lambda) - (1+m^2-\lambda^2)[(1+m^2)^3+2m^2\lambda^4]}{[1+(\lambda-m)^2]^3}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{6.02}$$

und für die mittlere relative Schubspannung

$$\left.\begin{aligned} \tau' = \frac{\tau_m}{p^*} = {} & \frac{m}{4\lambda^2(1+m^2)}\left[\lambda^4-(1+m^2)^2+2(1+m^2)(1+m^2+3\lambda^2)\right] + \\ & + \frac{\varkappa\lambda^2}{2(1+m^2)}\left\{\frac{m(1+m^2-\lambda^2) - 2(1+m^2)(\lambda+m)}{[1+(\lambda+m)^2]^3} + \frac{m(1+m^2-\lambda^2) + 2(1+m^2)(\lambda-m)}{[1+(\lambda-m)^2]^3}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{6.03}$$

Die mittlere relative Spannung im Längsträger p_t' folgt aus

$$p_t' = \frac{p_t}{p^*} = \frac{E}{p^*}\varepsilon_1, \tag{6.04}$$

wobei ε_1 die mittlere Zusammendrückung des Bleches in der x-Richtung ist, nach (3.15) zu

$$p_t' = p_1' + \frac{2F'}{\lambda^2}. \tag{6.05}$$

Die mittlere Querzusammenziehung, aus der man die Annäherung der beiden Längsträger erhält, soll entsprechend dem Vorgehen bei den Spannungen auf die zur Knickspannung p^* des ebenen Streifens gehörige Zusammendrückung

$$\varepsilon^* \equiv \frac{p^*}{E} = \frac{\pi^2 h^2}{3\,(1-\nu^2)\,b^2} \tag{6.06}$$

bezogen werden. Sie folgt aus (3.16) zu

$$\varepsilon_2' \equiv \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon^*} = -\,\nu\,p_1' + \frac{2}{\lambda^2}\,(m^2+\lambda^2)\,F'\,. \tag{6.07}$$

Der relative Gleitwinkel γ' ergibt sich aus (3.17) zu

$$\gamma' \equiv \frac{\gamma}{\varepsilon^*} = 2\,(1+\nu)\,\tau' + 4\,\frac{m}{\lambda^2}\,F'\,. \tag{6.08}$$

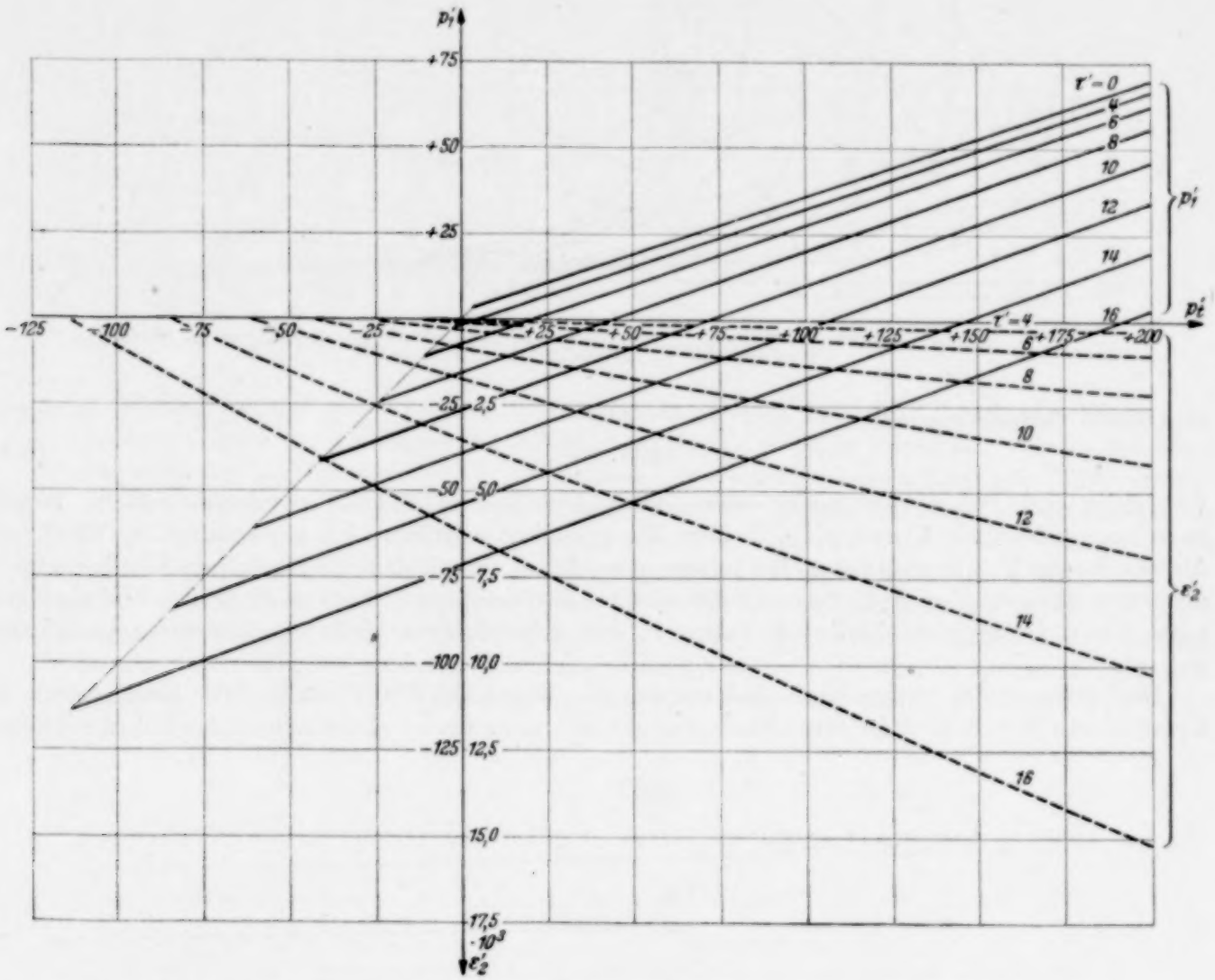

Abb. 7. Mittlere relative Blechspannung p_1' und mittlere relative Querzusammendrückung ε_2' als Funktion der relativen Trägerspannung p_t' bei weichen Querstützen; $\varkappa = 10$.

Mit ihm kann man den wirksamen relativen Schubmodul

$$F' \equiv \frac{\tau_m/\gamma}{G} = 2\,(1+\nu)\,\frac{\tau'}{\gamma'} \tag{6.09}$$

berechnen.

Diese so für verschiedene angenommene Faltenwinkel (m) und Wellenlängen (λ) für ein bestimmtes, willkürlich gewähltes, konstantes Krümmungsmaß $\varkappa = 10$ und die Querkontraktionszahl $\nu = 0{,}3$ berechneten elastischen Größen sind in Abb. 7 bis 9 als Funktion der Spannung im Längsträger (p_t') für konstante Schubspannungen (τ') aufgetragen. In der (p_1', p_t')-Ebene der Abb. 7 sind die Kurven konstanter äußerer Druckkraft P_x nach (3.02) Gerade, die durch ihren Abszissenabschnitt

$$(p_t')_a = \frac{P_x}{p^*\,F_t} \tag{6.10}$$

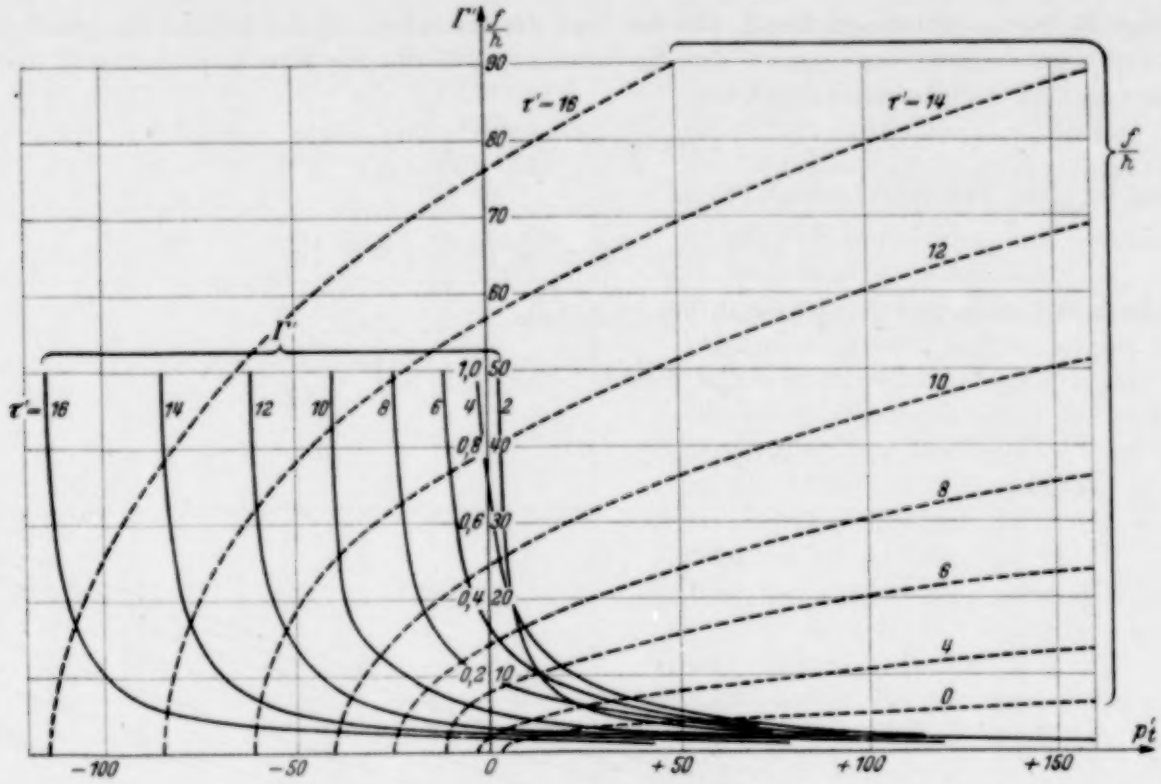

Abb. 8. Wirksamer relativer Schubmodul I^v und relative Ausbeulamplitude f/h als Funktion der relativen Trägerspannung p_t' bei weichen Querstützen; $\varkappa=10$.

und ihren Ordinatenabschnitt

$$(p_1')_a = \frac{P_x}{p^* b h} \tag{6.11}$$

festgelegt sind. Der Schnittpunkt einer solchen Geraden mit der zur gegebenen äußeren Schubspannung gehörigen Kurve $p_1'(p_t')$ liefert die gesuchte mittlere Druckspannung im Blech und die zugehörige Trägerspannung. Bei letzterer werden dann auf den zur gegebenen Schubspannung gehörigen Kurven der Abb. 7 bis 10 die übrigen interessierenden elastischen Größen abgelesen oder, wenn die gegebene Schubspannung in den Schaubildern nicht explizit vorkommt, interpoliert.

Die Grenzen der Diagramme sind erstens die Werte für $F'=0$, das ist die Knickgrenze für kombinierte Schub- und Axialkraftbelastung, und weiter die zu verschwindender Schubspannung

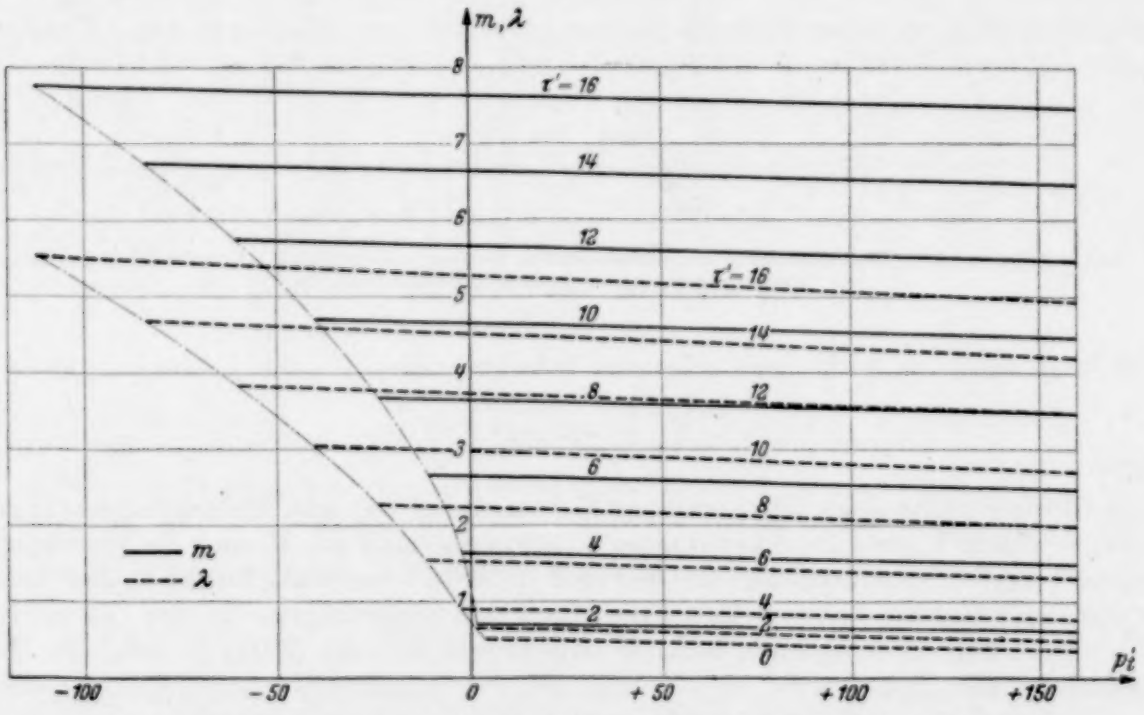

Abb. 9. Faltenwinkel ($\alpha=$ arccotg m) und relative Wellenlänge λ als Funktion der relativen Trägerspannung p_t' bei weichen Querstützen; $\varkappa=10$.

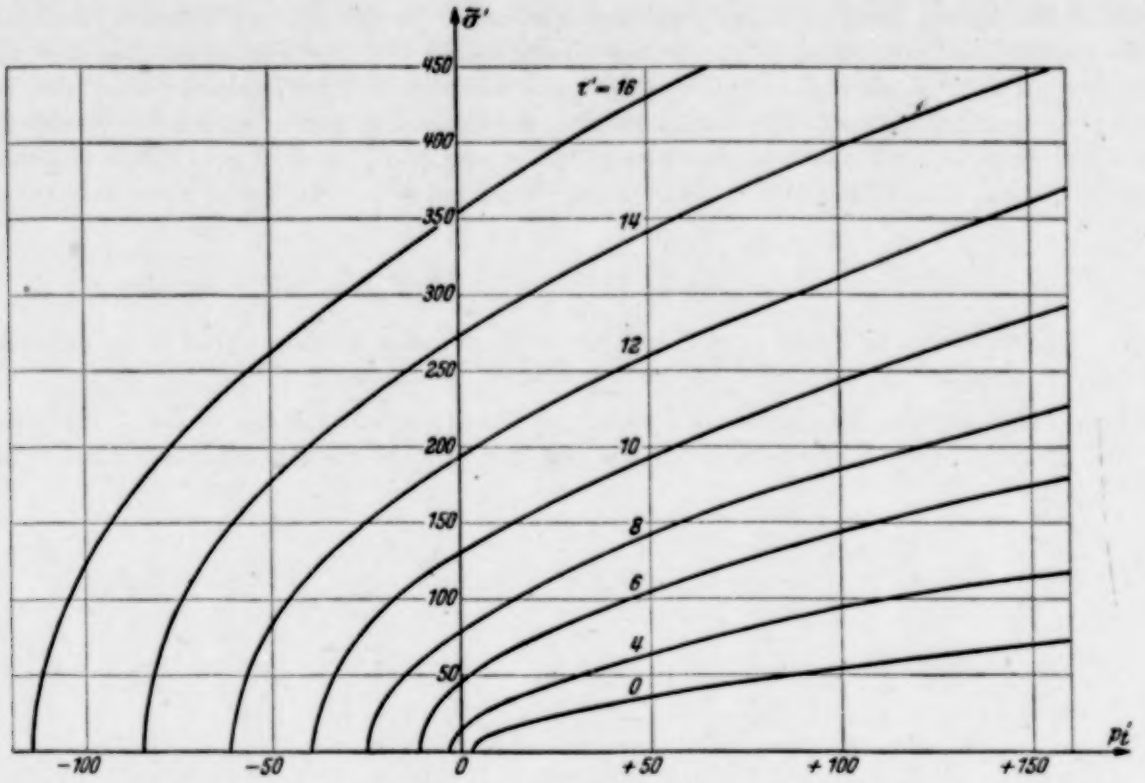

Abb. 10. Relative Biegespannung $\bar{\sigma}'$ als Funktion der relativen Trägerspannung p_t' bei weichen Querstützen; $\varkappa = 10$.

gehörigen Werte. Im übrigen wurden die Diagramme soweit berechnet, daß alle Werte für $\tau' = 16$ — das ist etwa die fünffache Knickschubspannung — noch abgelesen werden können.

Die eingeführten mathematischen Vereinfachungen verlangen etwa folgende Blechabmessungen, die aus der angegebenen dimensionslosen Form der Ergebnisse nicht sofort ersichtlich sind.

Damit sich mindestens eine Vollwelle in der x-Richtung ausbilden kann, muß das Seitenverhältnis $a/b > 5$ sein. Liegt a/b zwischen 5 und 3, so dürften die Diagramme nur für $\tau' \leqq 10$ einigermaßen brauchbare Näherungswerte liefern. Wegen der Vereinfachung (3.19) können gute Näherungswerte erst bei größeren Werten a/b oder kleineren τ' (etwa $\tau' < 7$) erwartet werden. Die Blechbreite sollte für $\tau' \leqq 10$ mindestens das 1000fache, für $\tau' = 16$ etwa das 1700fache der Blechstärke sein.

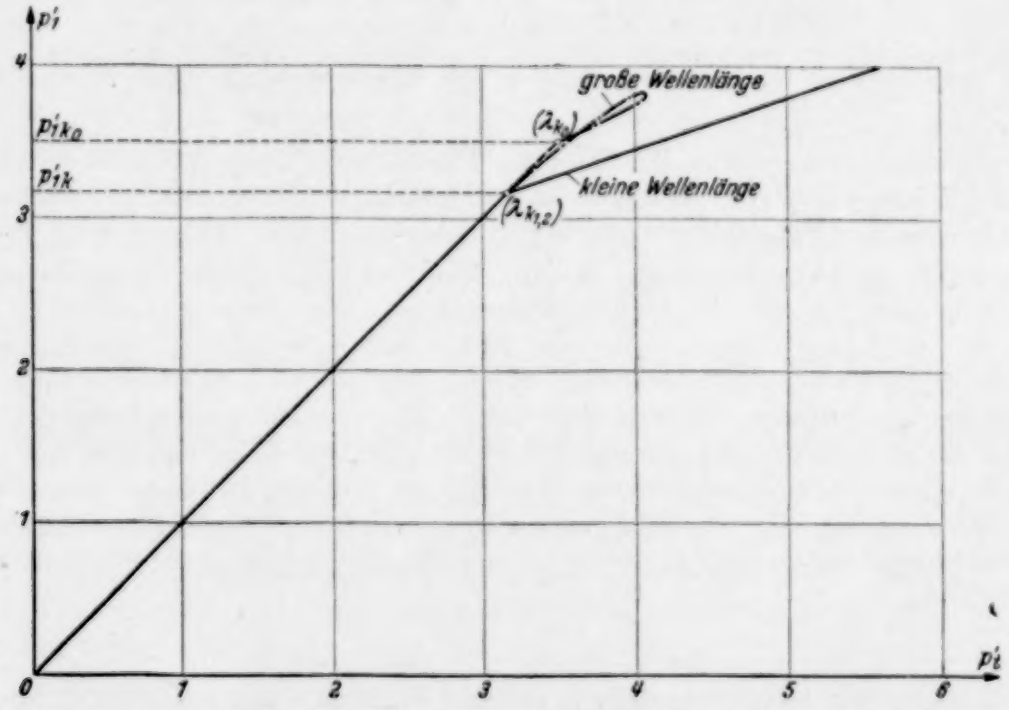

Abb. 11. Blechspannung p_1' als Funktion der Trägerspannung p_t' für die beiden Ausbeulformen bei Druckknickung und weichen Querstützen; $\varkappa = 10$.

Um die Beanspruchung des ausgeknickten Bleches beurteilen zu können, muß man auch noch die größte Biegespannung $\bar{\sigma}_{max}$ in den Randfasern bei $z = \pm h/2$ kennen, die sich den im Vorstehenden für $z=0$ berechneten Spannungen überlagert. Im Rahmen der hier benützten Näherung unterscheidet sich die Bestimmung dieser Biegespannung nicht von der für den ebenen Streifen, wie aus den Gleichungen (2.04/5) und (2.07) hervorgeht. Wir können deshalb die Formel dafür von *Kromm* und *Marguerre*[1] übernehmen. Sie lautet mit unseren Bezeichnungen

$$\bar{\sigma}' \equiv \frac{\bar{\sigma}_{max}}{p^*} = \pm \frac{3\,f}{4\,\lambda^2 h}\left[1 + m^2 + \lambda^2 + \sqrt{(1 + m^2 + \lambda^2)^2 - 4\lambda^2}\,\right]. \qquad (6.12)$$

Die hierin auf der rechten Seite auftretenden Größen sind aus Abb. 8 und 9 zu entnehmen und liefern die in Abb. 10 angegebenen relativen Biegespannungen[2].

Die Untersuchung des überkritischen Bereichs beantwortet auch die in Ziff. 5 offen gebliebene Frage, ob die Schale bei reinem Axialdruck mit der großen oder der kleinen Wellenlänge ausknickt:

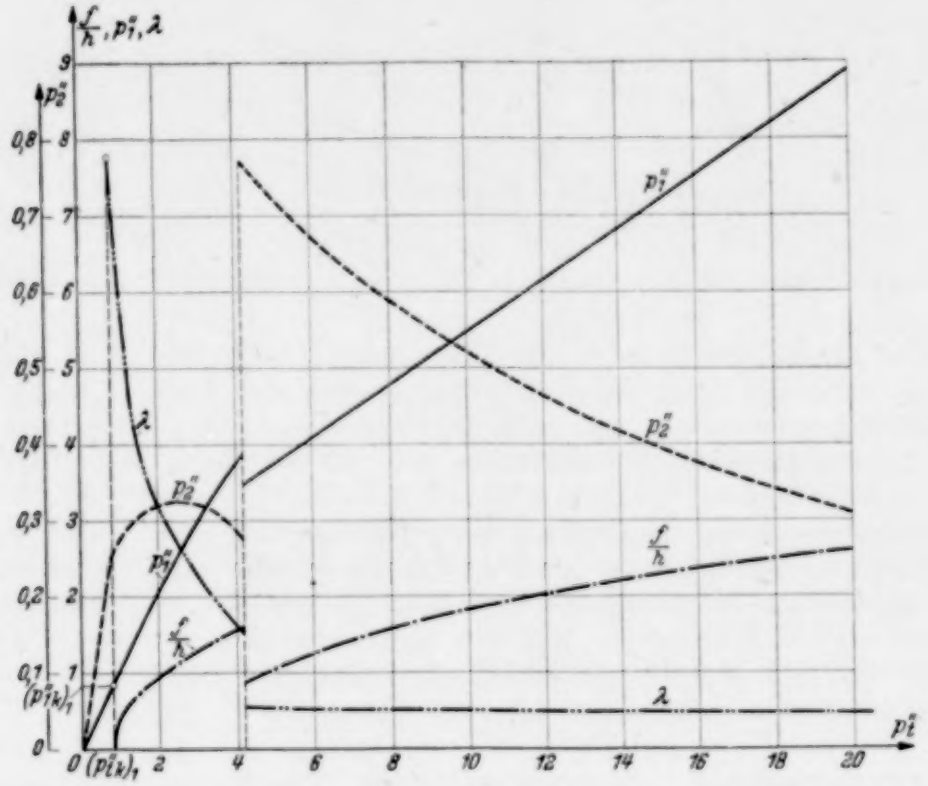

Abb. 12. Relative Werte der Druckspannungen p_1'', p_2'', der Ausbeulamplitude f/h und der Wellenlänge λ als Funktion der mittleren relativen Trägerspannung p_t'' für reine Druckbelastung bei starren Querstützen; $\varkappa = 10$.

Die Formänderungsenergie im Blech ist der Fläche unter der $p_1'(p_t')$-Kurve proportional. Von mehreren möglichen Gleichgewichtslagen ist nun diejenige zu erwarten, für welche bei gegebener Randverschiebung die Formänderungsarbeit am kleinsten ist. Abb. 11 zeigt die Verhältnisse bei dem untersuchten Krümmungsmaß $\varkappa = 10$. Von dem niedrigeren Eigenwert $p_{1k}' = \sqrt{10}$ gehen die beiden Kurven $p_1'(p_t')$ für die beiden Wellenlängen aus. Mit wachsendem p_t' nehmen beide Wellenlängen von ihren zueinander reziproken kritischen Werten λ_{k1} und λ_{k2} nach (5.02) ausgehend ab. Die größere Wellenlänge kann dabei nur bis zu dem zum höheren Eigenwert $p_{1k0}' = 3{,}5$ gehörigen Wert $\lambda_{k0} = 1$ sinken. Sie erfordert bei gleicher Zusammendrückung — gleicher Trägerkraft — stets die größere Blechspannung, die beinahe der zur nicht ausgebeulten Lage gehörigen gleichkommt, während die zur kleineren Wellenlänge gehörige Blechspannung stets wesentlich tiefer liegt, also auch die geringere Formänderungsarbeit erfordert. Da sie sich demnach bei der kleinsten Überschreitung der Knicklast stabil einstellt, ist sie auch die zu erwartende stabile Knickwellenlänge.

---

[1] *A. Kromm* und *K. Marguerre*, Luftfahrtforsch. 14 (1937) S. 635.

[2] Die Genauigkeit der so berechneten Biegespannungen ist gering, worauf mich Herr *W. Flügge* freundlicherweise aufmerksam gemacht hat. Sie sind angegeben, damit man im Einzelfall wenigstens abschätzend beurteilen kann, ob eine wesentliche Voraussetzung der Theorie — das *Hooke*sche Gesetz — noch erfüllt ist.

7. Der überkritisch beanspruchte Streifen mit steifen Querstützen. Sind die Querstützen so steif, daß die Längsträger ihren ursprünglichen Abstand beibehalten, so besteht nach (3.16) zwischen den beiden mittleren relativen Blechspannungen $p_1'' = p_1/p^*$ und $p_2'' = p_2/p^*$ und der relativen Beulamplitude F'' dieses Grenzfalls der Zusammenhang

$$\frac{E\,\varepsilon_2}{p^*} = 0 = p_2'' - \nu p_1'' + 2\,(m^2+\lambda^2)\,\frac{F''}{\lambda^2}\,. \tag{7.01}$$

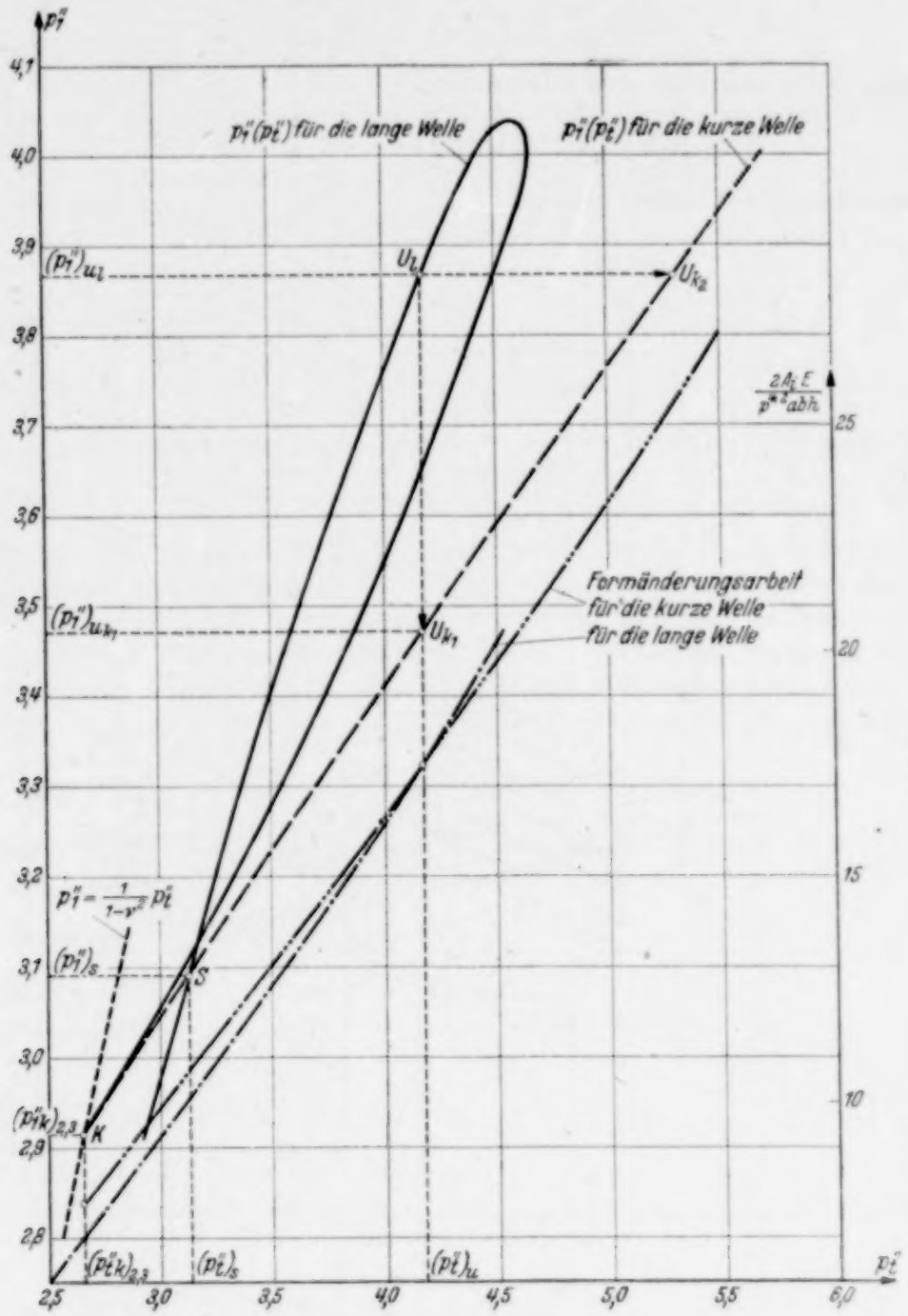

Abb. 13. Übergang von der langwelligen auf die kurzwellige Beulform bei starren Querstützen; $\varkappa = 10$.

Eine weitere Beziehung zwischen p_2'' und F'' folgt aus der Hauptgleichung (3.23) in Verbindung mit (6.01) zu

$$p_2'' = \frac{F''-F'}{(1+m^2)^2}\,, \tag{7.02}$$

wobei wir die in Ziff. 6 für den dort untersuchten Grenzfall gefundenen Größen F', p_1' usw. als Zwischenwerte für die Rechnung benutzen und in den Gleichungen stehen lassen wollen. Nehmen wir als dritte Gleichung die Hauptgleichung (3.22) für p_1'' hinzu, so wird in Verbindung mit (6.07)

$$p_2'' = -\frac{\lambda^2\,\varepsilon_2'}{\nu\left[(1+m^2)^2 + m^2\lambda^2 + \frac{2\,m^2\lambda^4}{1+m^2}\right] - 2\,(1+m^2)^2\,(m^2+\lambda^2) - \lambda^2} \tag{7.03}$$

und mit diesem Wert

$$p_1'' = p_1' + p_2'' \frac{(1+m^2)^3 + m^2\lambda^2(1+m^2+2\lambda^2)}{\lambda^2(1+m^2)}, \tag{7.04}$$

$$F'' = F' + p_2''(1+m^2)^2. \tag{7.05}$$

Die relative Schubspannung erhält man aus (3.24) und (6.03) zu

$$\tau'' \equiv \frac{\tau_m}{p^*} = \tau' - p_2'' \frac{m(1+m^2+\lambda^2)}{1+m^2} \tag{7.06}$$

und aus ihr nach (3.17) den relativen Gleitwinkel

$$\gamma'' \equiv \frac{\gamma}{\varepsilon^*} = 2(1+\nu)\tau'' + 4\frac{m}{\lambda^2}F'', \tag{7.07}$$

womit auch der relative wirksame Schubmodul

$$I'' \equiv \frac{\tau_m/\gamma}{G} = 2(1+\nu)\frac{\tau''}{\gamma''} \tag{7.08}$$

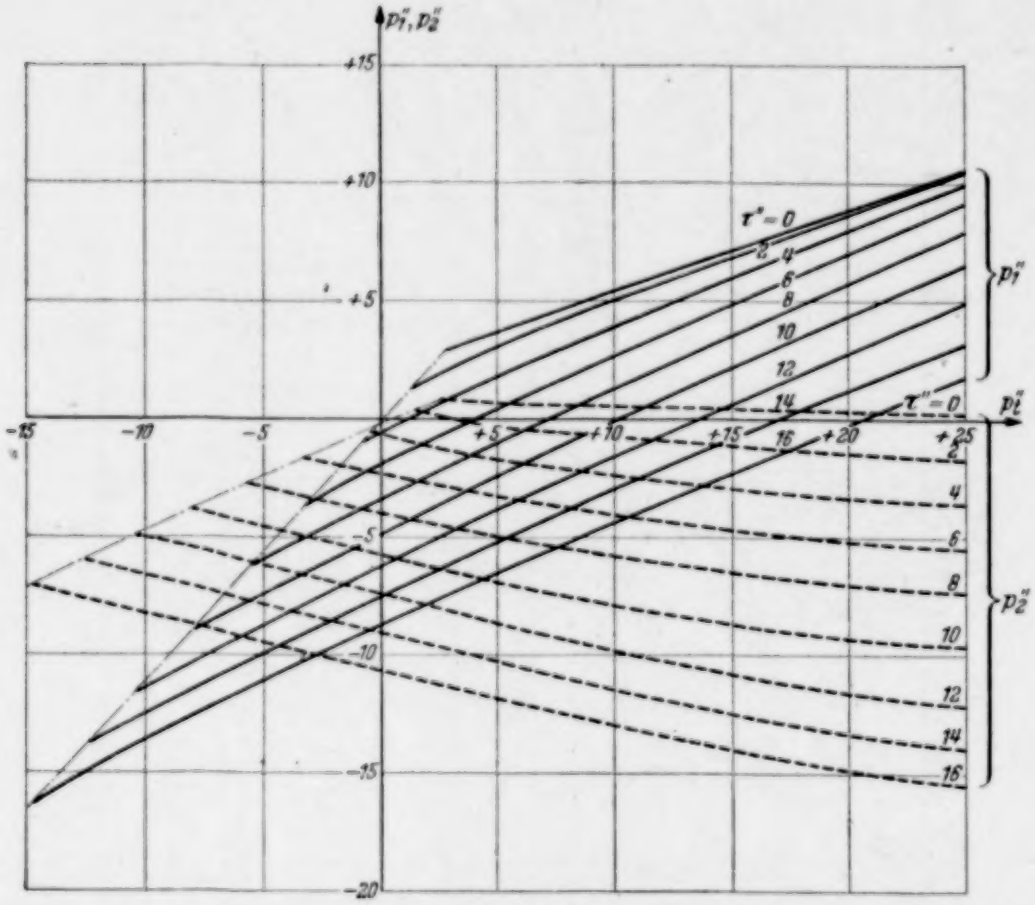

Abb. 14. Mittlere relative Blechspannungen p_1'' und p_2'' als Funktion der relativen Trägerspannung p_t'' bei starren Querstützen für die kurzwellige Ausbeulform; $\varkappa = 10$.

festliegt. Die mittlere relative Spannung im Längsträger p_t'' folgt wiederum aus der mittleren Zusammendrückung ε_1 des Blechs und kann auf mehrfache Weise berechnet werden:

$$\left.\begin{aligned} p_t'' \equiv \frac{p_t}{p^*} &= p_1'' - \nu p_2'' + \frac{2}{\lambda^2}F'' = p_t' + p_2''\left[\frac{3(1+m^2)^3 + m^2\lambda^2(1+m^2+2\lambda^2)}{\lambda^2(1+m^2)} - \nu\right] \\ &= p_t' + p_1'' - p_1' + p_2''\left[\frac{2(1+m^2)^2}{\lambda^2} - \nu\right]. \end{aligned}\right\} \tag{7.09}$$

Wir wollen diese Werte bei dem oben gewählten Krümmungsmaß $\varkappa = 10$ zuerst für verschwindende Schubspannung untersuchen. In Ziff. 5 war schon festgestellt worden, daß in diesem Fall die relative Knickspannung $(p_{1k}'')_1 = 0{,}824$ wird, zu der eine relative Wellenlänge $\lambda_{k1} = 7{,}76$ und eine Trägerspannung $(p_{tk}'')_1 = (1-\nu^2)(p_{1k}'')_1 = 0{,}757$ gehören. Mit wachsender Zusammendrückung ε_1 – d. h. steigendem p_t'' – sinkt die Wellenlänge (vgl. Abb. 12). Sie wird im Punkt S der Abb. 13, in der ein Teilgebiet der Abb. 12 vergrößert dargestellt ist, $\lambda_{s1} = 2{,}15$ bei $(p_1'')_s = 3{,}09$

und $(p_t'')_s = 3{,}14$. Die gleiche Trägerspannung $(p_t'')_s = 3{,}14$ und damit auch die gleiche Zusammendrückung in axialer Richtung bei der gleichen Blechspannung $(p_1'')_s = 3{,}09$ erhält man aber auch für eine Ausbeulform mit der kurzen Wellenlänge $\lambda_{sk} = 0{,}574$. Diese geht stetig aus der Knickform mit der Wellenlänge $\lambda_{k3} = 0{,}608$ hervor, zu welcher der Eigenwert $(p_{1k}'')_3 = 2{,}916$ bei $(p_{tk}'')_3 = 2{,}65$ gehört (Punkt K). Die zum gleichen Eigenwert gehörige Knickform mit der Wellenlänge

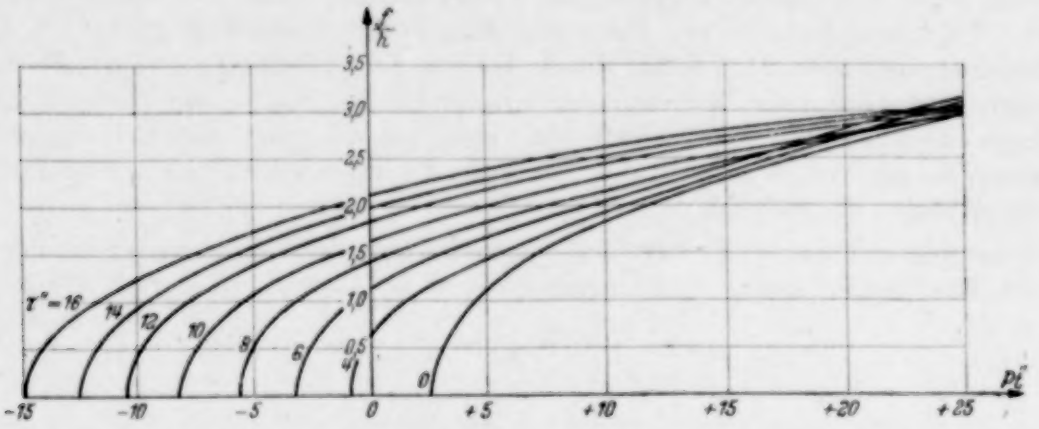

Abb. 15. Relative Ausbeulamplitude f/h als Funktion der relativen Trägerspannung p_t'' bei starren Querstützen für die kurzwellige Ausbeulform; $\varkappa = 10$.

$\lambda_{k2} = 0{,}632$, die wir außerdem in Ziff. 5 gefunden hatten, stellt dagegen das Ende der aus der langwelligen Beulform sich stetig entwickelnden Zustände dar. Sie ist instabil.

Im Zustand S ist nun die Formänderungsarbeit — die Fläche zwischen der Abszissenachse und der $p_1''(p_t'')$-Kurve — für die langwellige Beulform noch kleiner als für die kurzwellige. Die Zustände des Streifens werden also bei weiterer stetiger Zusammendrückung auf der Kurve zwischen S und U_l liegen. Dabei sei mit U_l derjenige Zustand der langwelligen Ausbeulform

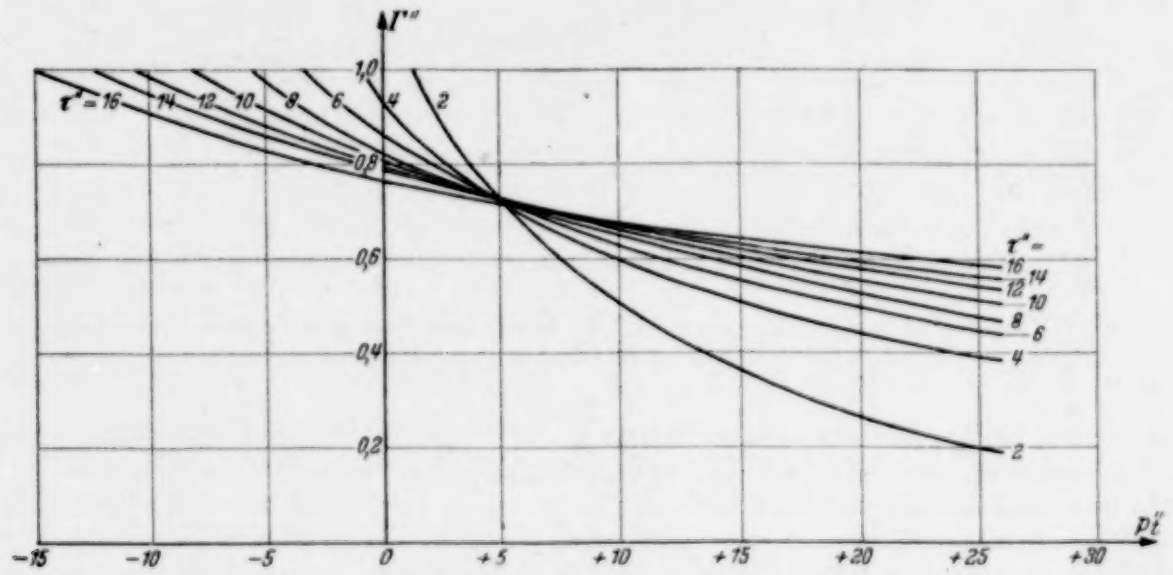

Abb. 16. Wirksamer relativer Schubmodul Γ'' als Funktion der relativen Trägerspannung p_t'' bei starren Querstützen für die kurzwellige Ausbeulform; $\varkappa = 10$.

bezeichnet, für den die Formänderungsarbeiten bei gleicher Zusammendrückung für die langwellige und die kurzwellige Ausbeulform gleich groß sind. Er liegt im vorliegenden Fall bei $\lambda_{ul} = 1{,}5$ und hat die Koordinaten $(p_t'')_u = 4{,}18$ und $(p_1'')_{ul} = 3{,}87$, während zu dem Zustand gleicher Formänderungsenergie für die kurze Welle U_{k1} die Blechspannung $(p_1'')_{uk1} = 3{,}47$ mit einer Wellenlänge $\lambda_{uk1} = 0{,}542$ gehört. Für $p_t'' > (p_t'')_u$ ist die Formänderungsarbeit für die kurzwellige Beulform die kleinere.

Bei stetiger Steigerung der Zusammendrückung wird somit bei Vernachlässigung der inneren Reibung der Beulzustand bei $(p_t'')_u$ vom Punkt U_l auf den Punkt U_{k1} springen, wobei die Blech-

spannung von $(p_1'')_{ul}$ auf $(p_1'')_{uk_1}$ absinkt. Die geringe zur Überwindung der Werkstoffdämpfung bei der Umlagerung notwendige Arbeit wird dadurch aufgebracht, daß die Wellenlänge erst etwas oberhalb $(p_t'')_u$ wechselt, wo die Formänderungsenergie des langwelligen Ausgangszustandes größer ist als die des kurzwelligen Endzustandes, so daß die Differenz den Umlagerungsverlust decken kann.

Bei stetiger Steigerung der Last dagegen wird der Streifen vom Zustand U_l aus unter plötzlichem „Fließen" — d. h. einer Steigerung der Zusammendrückung bei konstanter Kraft — auf den Zustand U_{k_2} übergehen, dessen Formänderungsarbeit wesentlich größer ist. Die Differenz der Formänderungsarbeiten wird dabei durch die von der äußeren Kraft beim Fließen geleistete Arbeit aufgebracht. Diese ist um den der Fläche $[U_l U_{k_1} U_{k_2}]$ entsprechenden Betrag größer als dafür notwendig ist. Der Überschuß setzt sich wie bei einer plötzlich aufgebrachten Last in Schwingungsenergie um. Oberhalb des Zustands U_{k_2} ist wieder nur ein Zustand, nämlich der kurzer Beulwellenlänge, möglich.

Entsprechendes gilt auch für vereinigte Druck- und Schubbelastung, solange die letztere nur klein ist. Die Möglichkeiten des Übergangs von der langen zur kurzen Welle erhöhen sich

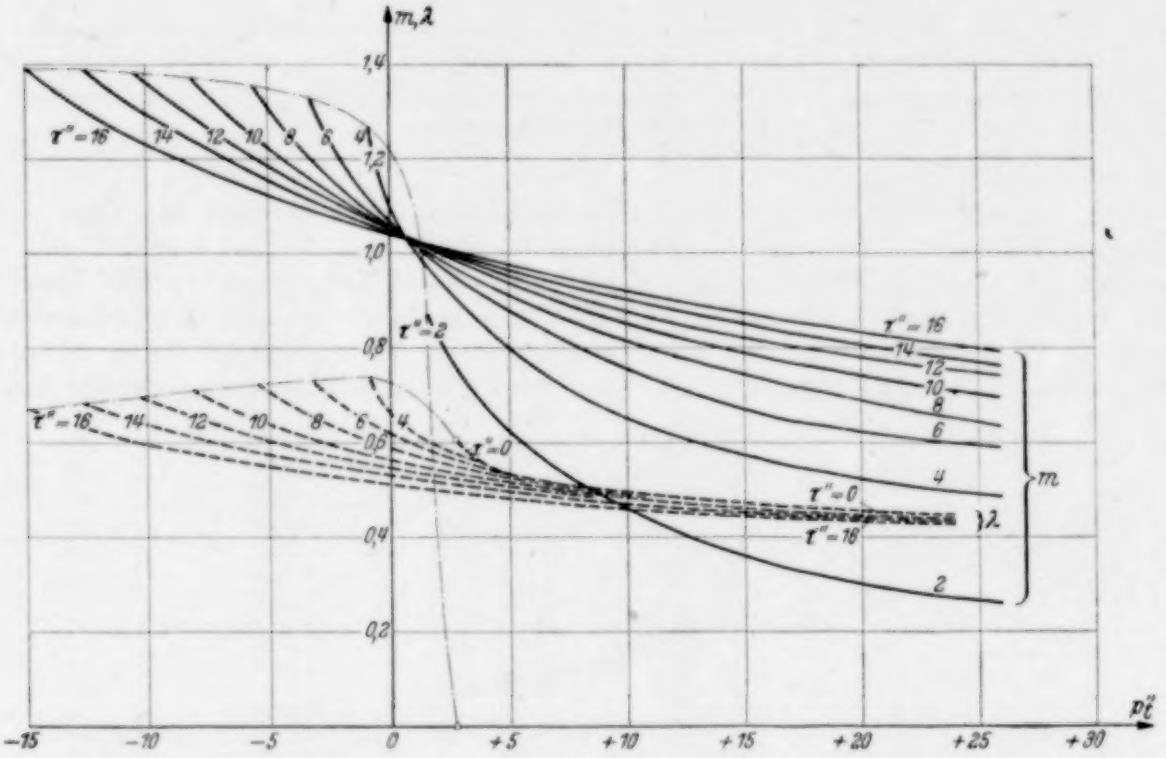

Abb. 17. Faltenwinkel ($\varkappa = \operatorname{arccotg} m$) und relative Wellenlänge λ als Funktion der relativen Trägerspannung p_t'' bei starren Querstützen für die kurzwellige Ausbeulform; $\varkappa = 10$.

jedoch, da bei beiden Belastungen entweder die Belastung oder die Formänderung unabhängig oder von einander abhängig variabel oder auch zum Teil konstant sein können. Aus diesem Grunde und weil der Bereich nur klein ist, in dem die langwellige Beulform möglich ist, sind in den Schaubildern 14 bis 18 die elastischen Größen, die nach den Gleichungen (7.03) bis (7.09) und (6.12) mit $\nu = 0{,}3$ berechnet worden sind, nur für die kurzwellige Beulform angegeben. In unmittelbarer Nähe der Knickgrenze und für kleine Schubspannungen ($\tau'' < 4$) können sich davon abweichende Werte einstellen, sofern die Querträger soweit voneinander entfernt sind, daß sich die langwellige Beulform überhaupt ausbilden kann.

Bei der kurzwelligen Beulform erfüllen etwa Seitenverhältnisse $a/b \geqq 3$ und Blechbreiten $b/h \geqq 100$ die mathematischen Voraussetzungen.

Der in dieser Ziffer untersuchte Grenzfall starrer Querstützen kommt im allgemeinen den tatsächlich vorliegenden Verhältnissen sehr nahe. Wie man zwischen ihm und dem in Ziff. **6** behandelten Fall weicher Querstützen interpolieren kann, haben *Kromm* und *Marguerre*[1] des näheren erläutert.

[1] *A. Kromm* und *K. Marguerre*, Luftfahrtforsch. 14 (1937), S. 638.

8. Zusammenfassung. Oberhalb der Beulgrenze versagt die linearisierte Elastizitätstheorie. Man erhält eine erste Näherung für das elastische Verhalten ausgebeulter Bauteile, wenn man von den Potenzentwicklungen der Deformationen bei der Ausbiegung die Glieder zweiter Ordnung hinzunimmt, während man sich bei den Verschiebungen senkrecht zur Ausbeulrichtung weiterhin auf die linearen Glieder beschränken darf. Ferner darf man schwach gekrümmte Schalen als vorgekrümmte Platten behandeln.

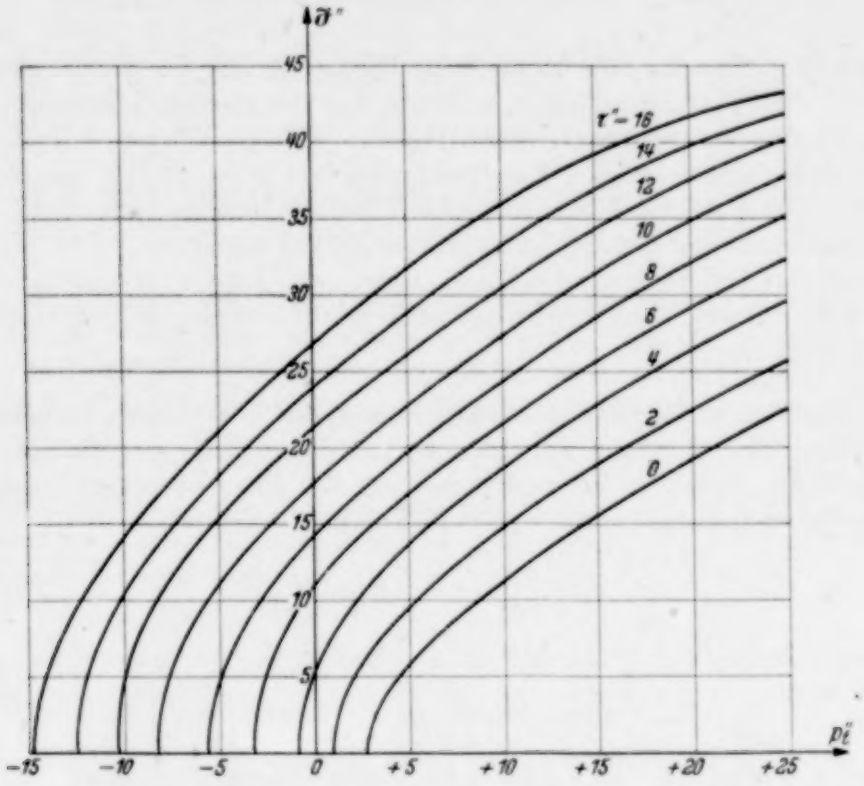

Abb. 18. Relative Biegespannung $\bar{\sigma}''$ als Funktion der relativen Trägerspannung p_i'' bei starren Querstützen für die kurzwellige Ausbeulform; $\varkappa = 10$.

Unter diesen Voraussetzungen wurde mit Hilfe der energetischen Methode in der von *Marguerre* angegebenen Form ein sehr langer, schwach gekrümmter Schalenstreifen unter Schub- und axialer Druckbelastung untersucht. Für ein bestimmtes Krümmungsmaß wurden Diagramme angegeben, aus denen die berechneten elastischen Größen für die beiden Grenzfälle vollkommen nachgiebiger und vollkommen steifer Querstützen entnommen werden können.

(Eingegangen am 6. Oktober 1947.)

Eindimensionale stationäre Gleichdruckströmung in bewegten Systemen*.

Von **W. Richter** in Duisburg.

1. Einleitung. Es sollen für eine ideale Flüssigkeit, für die das Gesetz des isotropen Druckes gilt, die innere Reibung vernachlässigt und die Dichte überall konstant angenommen wird, eindimensionale stationäre Strömungen untersucht werden. Dabei soll der auf die Flächeneinheit bezogene Flüssigkeitsdruck p konstant gefordert werden. Die aus dem Grundgesetz der Dynamik folgende *Euler*sche Gleichung werde auf Relativbewegungen angewendet. Die relativen und absoluten Bahnkurven, die bei stationären Bewegungen mit den Stromlinien identisch sind, sollen, soweit das mit elementaren Funktionen möglich ist, rechnerisch, in anderen Fällen graphisch bestimmt werden. Die Ergebnisse stehen mit Fragen des Strömungsmaschinenbaues in engem Zusammenhang.

2. Eulersche Gleichung für Gleichdruckströmung bei stationären Relativbewegungen. Bedeuten $\mathfrak{c}$ den Vektor der Absolutgeschwindigkeit, $\mathfrak{k}$ den Vektor der auf die Masseneinheit bezogenen äußeren Kraft, ϱ die Dichte und p den auf die Flächeneinheit bezogenen Flüssigkeitsdruck, so lautet die vektoriell geschriebene *Euler*sche Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{c}}{dt} = \mathfrak{k} - \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p. \tag{1}$$

Wird die substantielle Änderung der Absolutgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ in ihren lokalen und ihren konvektiven Teil zerlegt

$$\frac{d\mathfrak{c}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t} + \mathfrak{c} \nabla \cdot \mathfrak{c} = \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t} + c_x \cdot \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial x} + c_y \cdot \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial y} + c_z \cdot \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial z}$$

und der Flüssigkeitsdruck p überall konstant gefordert, wofür

$$\operatorname{grad} p = 0$$

wird, so erhält man aus (1)

$$\frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t} + \mathfrak{c} \nabla \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{k}.$$

Ist die Bewegung stationär, also $\partial \mathfrak{c}/\partial t = 0$, so ergibt sich daraus, wenn die Vektorformel

$$\operatorname{grad} \mathfrak{c}^2 = 2\{\mathfrak{c} \nabla \cdot \mathfrak{c} + [\mathfrak{c}, \operatorname{rot} \mathfrak{c}]\}$$

benutzt wird, die Gleichung

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} \mathfrak{c}^2 + [\operatorname{rot} \mathfrak{c}, \mathfrak{c}] = \mathfrak{k}. \tag{2}$$

Es soll nun die Strömung in einem bewegten System betrachtet werden. Wenn die ganze Bewegung stationär erfolgen soll, so muß die Bewegung des bewegten Systems eine gleichförmige Schraubung um eine feste Achse sein, damit $\mathfrak{u}$, der Vektor der Führungsgeschwindigkeit, überall und für jeden Zeitpunkt von der Zeit unabhängig ist. Es treten dann als praktisch besonders wichtige Sonderfälle die gleichförmige Translation und die gleichförmige Rotation des Systems auf.

Ist $\mathfrak{v}$ der Vektor der Relativgeschwindigkeit der Bewegung, für die das bewegte System als ruhend angenommen wird, dann gilt

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{v} + \mathfrak{u}. \tag{3}$$

Erfolgt die Relativbewegung entlang von Profilen, wie sie bei den Schaufeln im Laufrad

---

* Diese Arbeit wurde vom Verfasser auf Anregung von *F. Schicht* (Außig) im Zusammenhang mit Berechnungen der Gleichdruckgebläse durchgeführt. Sie war schon am 19. Mai 1944 erstmals bei der Schriftleitung eingegangen und für das (nicht mehr erschienene) zweite Heft des Bandes XV des Ingenieur-Archivs bestimmt gewesen.

von Turbinen und Gebläsen vorkommen, so erhält man nach der *Prandtl-Lagally*schen Formel[1] die auf die Masseneinheit wirkende Kraft

$$\mathfrak{k}=[\text{rot } \mathfrak{c}, \mathfrak{v}] . \tag{4}$$

Wird (4) innerlich mit dem Vektor $\mathfrak{v}$ multipliziert, so erhält man

$$\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{v}=0 . \tag{5}$$

Die Tatsache, daß die Kraft $\mathfrak{k}$ normal zur Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ steht, wird zur Konstruktion verwendet werden.

Wegen (3) und (4) erhält die Gleichung (2) die Form

$$\frac{1}{2}\,\text{grad } \mathfrak{c}^2=[\mathfrak{u}, \text{rot } \mathfrak{c}] . \tag{6}$$

Der Vektor grad $\mathfrak{c}^2$ steht also normal sowohl zu $\mathfrak{u}$, dem Vektor der Führungsgeschwindigkeit, als auch zu rot $\mathfrak{c}$, dem Rotor der Absolutgeschwindigkeit.

3. Bewegung in einer gleichförmig in sich selbst verschobenen Ebene. In einem rechtsgängigen kartesischen Koordinatensystem mit den Achsen x, y und z (Abb. 1), in dem $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$ und $\mathfrak{e}_z$ die mit den Koordinatenachsen gleichgerichteten Einheitsvektoren sind, sei die Relativbewegung auf die (x, y)-Ebene beschränkt. Die Relativgeschwindigkeit sei

$$\mathfrak{v}=v_x\,\mathfrak{e}_x+v_y\,\mathfrak{e}_y .$$

Dieses System sei einer gleichförmigen Translation parallel zur (x, y)-Ebene unterworfen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit werde die konstante Führungsgeschwindigkeit in der Richtung der negativen y-Achse angenommen

$$\mathfrak{u}=-u\,\mathfrak{e}_y \quad (u>0).$$

Die dann auch in der (x, y)-Ebene liegende Absolutgeschwindigkeit sei

$$\mathfrak{c}=c_x\,\mathfrak{e}_x+c_y\,\mathfrak{e}_y ,$$

wobei wegen (3) $c_x=v_x$ und $c_y=v_y-u$ ist. Weil c_x und c_y von z nicht abhängen, ergibt sich

$$\text{rot } \mathfrak{c}=\left(\frac{\partial c_y}{\partial x}-\frac{\partial c_x}{\partial y}\right)\mathfrak{e}_x=-\omega\,\mathfrak{e}_x$$

als Vektor normal zur (x, y)-Ebene, wobei ω die Dimension einer Winkelgeschwindigkeit hat.

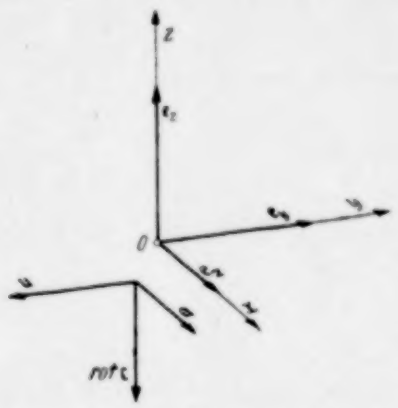

Abb. 1. Bewegung in einer gleichförmig in sich selbst verschobenen Ebene. Koordinatensystem mit Einheitsvektoren.

Deshalb ist

$$[\mathfrak{u}, \text{rot } \mathfrak{c}]=\mathfrak{a}=a\,\mathfrak{e}_x$$

ein Vektor, der parallel zur x-Achse liegt, und es ist $a=u\,\omega$. Wird, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, a positiv vorausgesetzt, so ist auch ω positiv.

Für das Folgende werde a konstant gefordert, dann ist auch ω konstant. Gleichung (6) hat dann die Form

$$\frac{1}{2}\,\frac{d\mathfrak{c}^2}{dx}=a ,$$

woraus sich

$$\mathfrak{c}^2=2\,a\,x+b \tag{7}$$

ergibt. Das Quadrat der Absolutgeschwindigkeit ist also eine lineare Funktion der Abszisse x. Die Forderung, daß a konstant ist, hat demnach eine gleichförmige Zunahme der absoluten Bewegungsenergie in der Richtung der Abszissenachse zur Folge, über deren Ursache in dieser Untersuchung keine Aussagen gemacht werden sollen.

Gehört zu $x=0$ die absolute Eintrittsgeschwindigkeit

$$\mathfrak{c}_0=c_{x_0}\,\mathfrak{e}_x+c_{y_0}\,\mathfrak{e}_y ,$$

so erhält man für die Konstante b den Wert c_0^2.

Aus

$$\mathfrak{c}^2=c_x^2+c_y^2=2\,a\,x+b$$

[1] Vgl. etwa *Wilhelm Müller*, Mathematische Strömungslehre, S. 212. Berlin 1928.

ergeben sich die Differentialgleichungen

$$c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_y}{\partial x} = \sigma \tag{8a}$$

und

$$c_x \frac{\partial c_x}{\partial y} + c_y \frac{\partial c_y}{\partial y} = 0 . \tag{8b}$$

Nimmt man dazu noch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial c_x}{\partial y} - \frac{\partial c_y}{\partial x} = \omega , \tag{8c}$$

so folgen für die Komponenten c_x und c_y der Absolutgeschwindigkeit c die linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\omega \sqrt{-c_y^2 + 2ax + b} + \sqrt{-c_y^2 + 2ax + b}\,\frac{\partial c_y}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_y}{\partial y} = 0 \tag{9}$$

und

$$-a - \omega \sqrt{-c_x^2 + 2ax + b} + c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} + \sqrt{-c_x^2 + 2ax + b}\,\frac{\partial c_x}{\partial y} = 0 . \tag{10}$$

Für

$$c_x = \sqrt{-c_y^2 + 2ax + b} = 0$$

liegt eine zur y-Achse parallele Bewegung vor. Aus (8c) folgt dann

$$c_y = -\omega x + \alpha ,$$

weshalb sich aus

$$c_y^2 = 2ax + b = \omega^2 x^2 - 2\alpha\omega x + \alpha^2$$

die Werte

$$\omega = 0, \quad \text{rot } c = 0, \quad \mathfrak{k} = 0, \quad a = 0, \quad c^2 = c_y^2 = b = \text{konst.}$$

ergeben. Es handelt sich also um eine gleichförmige Translation der (x, y)-Ebene parallel zur y-Achse.

Für

$$c_y = \sqrt{-c_x^2 + 2ax + b} = 0$$

ergibt sich analog eine gleichförmige Translation der (x, y)-Ebene parallel zur x-Achse.

Wenn

$$\sqrt{-c_y^2 + 2ax + b} \neq 0$$

ist, so ist die Differentialgleichung (9) äquivalent dem System

$$\frac{dc_y}{dx} = -\omega , \tag{9a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_y}{\sqrt{-c_y^2 + 2ax + b}} . \tag{9b}$$

Ist speziell $\omega = 0$, woraus $a = 0$ und daher $c^2 = b = \text{konst.}$ folgt, so ergibt (9a) für die zur y-Achse parallele Komponente c_y der Absolutgeschwindigkeit c einen konstanten Wert; dann ist aber auch die zur x-Achse parallele Komponente c_x konstant und es liegt eine gleichförmige Translation der (x, y)-Ebene mit der konstanten Geschwindigkeit c_0 vor.

Für den allgemeinen Fall $\omega \neq 0$ ergibt (9a) die Lösung

$$c_y = -\omega x + \alpha ,$$

deren Integrationskonstante für $x = 0$ gleich der y-Komponente c_{y_0} der absoluten Eintrittsgeschwindigkeit c_0

$$\alpha = c_{y_0}$$

wird. Die zur y-Achse parallele Koordinate c_y der Absolutgeschwindigkeit c ist daher eine lineare Funktion der Abszisse x:

$$c_y = -\omega x + c_{y_0} . \tag{10a}$$

Für die zur x-Achse parallele Komponente c_x folgt dann

$$c_x = \sqrt{-\omega^2 x^2 + 2(\omega c_{y_0} + a)\, x - c_{y_0}^2 + b} = \sqrt{-\omega^2 x^2 + 2\omega v_{y_0} x + c_{x_0}^2} . \tag{10b}$$

worin v_{y_0} die zur y-Achse parallele Komponente der relativen Eintrittsgeschwindigkeit v_0 ist.

Werden von einem festen Punkt Π aus die Vektoren c der Absolutgeschwindigkeit abgetragen, so erfüllen ihre Endpunkte eine Kurve, die Absoluthodograph H_{ab} genannt werden soll. Ihre Gleichung erhält man, wenn man aus

$$\xi = c_x = \sqrt{-\omega^2 x^2 + 2\omega v_{y_0} x + c_{x_0}^2}$$

und

$$\eta = c_y = -\omega x + c_{y_0}$$

den Parameter x eliminiert.

Es ergibt sich

$$\xi^2 + (\eta + u)^2 = c_0^2 + 2 u c_{y_0} + u^2 , \tag{11}$$

also ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0, -u)$ und dem Halbmesser

$$\varrho = \sqrt{c_0^2 + 2 u c_{y_0} + u^2} = v_0 ,$$

wobei v_0 die relative Eintrittsgeschwindigkeit bedeutet. Für spätere graphische Methoden mögen die Punkte des Absoluthodographen H_{ab} mit den entsprechenden Werten des Parameters x beziffert werden.

Wird (10a) in (9b) eingesetzt, so erhält man für die Absolutbahn der Bewegung eine Differentialgleichung, deren Lösung

$$y = \frac{1}{\omega} \sqrt{-\omega^2 x^2 + 2\omega v_{y_0} x + c_{x_0}^2} + \frac{u}{\omega} \arcsin \frac{v_{y_0} - \omega x}{v_0} + \alpha$$

ist. Dabei ist v_0 die relative Eintrittsgeschwindigkeit. Wird der Koordinatenursprung 0 als Anfangspunkt der Bewegung gewählt, so bekommt die Integrationskonstante α den Wert

$$\alpha = -\frac{1}{\omega} c_{x_0} - \frac{u}{\omega} \arcsin \frac{v_{y_0}}{v_0} ,$$

und die Gleichung der Absolutbahn ist daher

$$y = \frac{1}{\omega} (c_x - c_{x_0}) + \frac{u}{\omega} \left[\arcsin \frac{c_y + u}{v_0} - \arcsin \frac{v_{y_0}}{v_0} \right] . \tag{12}$$

Den zeitlichen Verlauf der Absolutbewegung erhält man aus

$$c_x = \frac{dx}{dt} = \sqrt{-\omega^2 x^2 + 2\omega v_{y_0} x + c_{x_0}^2}$$

in der Form

$$x = \frac{1}{\omega} \left[v_{y_0} + v_0 \sin \omega (t - \alpha) \right] .$$

Die Integrationskonstante α hat den Wert $\alpha = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{v_{y_0}}{v_0}$, wenn für $t = 0$ die Bewegung im Koordinatenursprung beginnt. Führt man den Winkel φ, den die relative Eintrittsgeschwindigkeit v_0 mit der x-Achse einschließt, ein:

$$\sin \varphi = \frac{v_{y_0}}{v_0} ,$$

so erhält man

$$x = \frac{1}{\omega} \left[v_{y_0} + v_0 \sin (\omega t - \varphi) \right] . \tag{13a}$$

Analog folgt aus

$$c_y = \frac{dy}{dt} = -\omega x + c_{y_0} = -u - v_0 \sin (\omega t - \varphi)$$

die Lösung

$$y = \frac{1}{\omega} \left[-v_{x_0} + v_0 \cos (\omega t - \varphi) \right] - u t . \tag{13b}$$

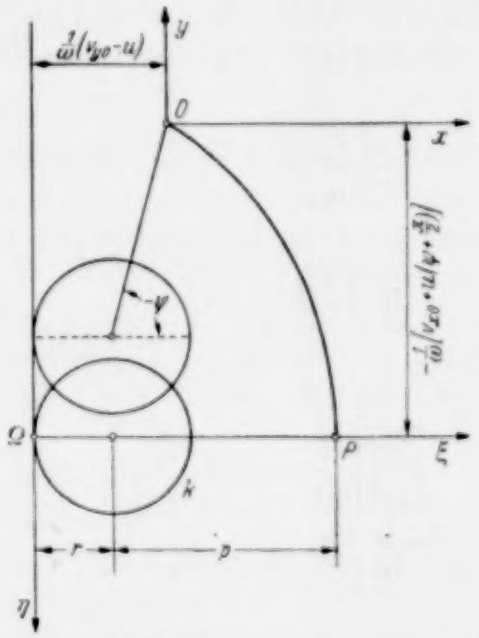

Abb. 2. Abrollen des Kreises k auf der η-Achse.

Rollt ein Kreis k (Abb. 2) mit dem Halbmesser r, der ursprünglich die η-Achse eines kartesischen Koordinatensystems im Koordinatenursprung Ω berührt hat und dessen Mittelpunkt auf der positiven Abszissenachse liegt, ohne zu gleiten, auf der Ordinatenachse ab, so beschreibt ein mit ihm festverbundener Punkt P, der ursprünglich auf der positiven Abszissenachse im Abstand $r + p$ vom Koordinatenursprung lag, eine Zykloide, deren Gleichungen

$$\xi = r + p \cos \psi , \qquad \eta = r \psi + p \sin \psi$$

sind, wenn ψ der Wälzungswinkel ist.

Setzt man

$$\xi = x - \frac{v_{y_0}}{\omega} + \frac{u}{\omega}$$

$$\eta = -y - \frac{v_{x_0}}{\omega} - \frac{u}{\omega}\left(\varphi + \frac{\Pi}{2}\right),$$

$$p = \frac{v_0}{\omega},$$

$$r = \frac{u}{\omega},$$

$$\psi = \omega t - \varphi - \frac{\Pi}{2},$$

so erhält man die Gleichungen (13a) und (13b). Der Ursprung Ω des (ξ, η)-Koordinatensystems hat die Koordinaten

$$x = \frac{v_{y_0}}{\omega} - \frac{u}{\omega}, \qquad y = -\frac{v_{x_0}}{\omega} - \frac{u}{\omega}\left(\varphi + \frac{\Pi}{2}\right).$$

Die ξ-Achse ist mit der x-Achse gleichgerichtet, die η-Achse ist zur y-Achse parallel, aber ihr entgegengesetzt gerichtet.

Die Absolutbahn der Bewegung ist also eine Zykloide, die durch den Koordinatenursprung 0 hindurchgeht.

Geschieht der Eintritt in das bewegte System speziell in der Richtung der positiven x-Achse, dann erhält man wegen

$$c_{x_0} = c_0, \qquad c_{y_0} = 0, \qquad v_{x_0} = c_0, \qquad v_{y_0} = u$$

die Formeln

$$c_x = -\sqrt{\omega^2 x^2 + c_0^2}, \qquad c_y = -\omega x.$$

Der Absoluthodograph ist

$$\xi^2 + (\eta + u)^2 = c_0^2 + u^2 = v_0^2,$$

und die Absolutbahn hat die Gleichung

$$y = \frac{1}{\omega}(c_x - c_0) + \frac{u}{\omega}\left[\arcsin\frac{c_y + u}{v_0} - \arcsin\frac{u}{v_0}\right].$$

Die η-Achse (Abb. 2) fällt mit der negativen y-Achse zusammen, was schon daraus folgt, daß die Absolutbahn die x-Achse im Koordinatenursprung 0 berühren muß.

Wird für die Gleichung des Absoluthodographen in

$$\eta = -\omega x + c_{y_0}$$

für x der Ausdruck (13a) eingesetzt, so erhält man

$$\eta = v_0 \sin(\omega t - \varphi) - u,$$

und für die Abszisse ergibt sich

$$\xi = v_0 \cos(\omega t - \varphi).$$

Der Kreis, der als Absoluthodograph H_{abs} gefunden wurde, wird demnach gleichförmig durchlaufen. Der Betrag der Absolutbeschleunigung ist daher konstant. Weil $|\text{rot}\,\mathfrak{c}| = \omega$ konstant war, ergibt sich schon daraus wegen (4), daß der Absolutbetrag der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ konstant sein muß. Auch aus

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{c}^2 = (\mathfrak{v} + \mathfrak{u})^2 = \mathfrak{v}^2 + 2\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{v} + \mathfrak{u}^2 = v^2 - 2u v_y + u^2 = \\ = v^2 - 2u(c_y + u) + u^2 = v^2 - 2u c_y - u^2 = 2ax + c_0^2 \end{aligned}\right\}$$

erhält man wegen (10a)

$$v^2 = c_0^2 + 2u c_{y_0} + u^2 = v_0^2 = \text{konst.}$$

Der Relativhodograph H_{rel} ist daher ein gleichförmig durchlaufener Kreis mit der relativen Eintrittsgeschwindigkeit v_0 als Halbmesser und dem Pol als Mittelpunkt.

Aus (3) sowie (10a) und (10b) erhält man für die Komponenten der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$

$$v_x = \sqrt{-\omega^2 x^2 + 2\omega v_{y_0} x + v_{x_0}^2}, \tag{14a}$$

$$v_y = -\omega x + v_{y_0}. \tag{14b}$$

Das oben hergeleitete Ergebnis für den Relativhodographen H_{rel} folgt auch aus (14a) und

(14b), wenn man den Parameter x eliminiert. Auch die Punkte des Relativhodographen H_{rel} sollen mit den entsprechenden Werten des Parameters x beziffert werden.

Für die Relativbahn ergibt sich aus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-\omega x + v_{y_0}}{\sqrt{-\omega^2 x^2 + 2\omega v_{y_0} x + v_{x_0}^2}}$$

der Kreis

$$\left(x - \frac{v_{y_0}}{\omega}\right)^2 + (y - \alpha)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 .$$

Die Integrationskonstante α erhält den Wert $\alpha = -v_{x_0}/\omega$, wenn als Ausgangspunkt der Bewegung der Koordinatenursprung 0 gewählt wird. Die Relativbahn ist daher ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M\,(v_{y_0}/\omega,\ -v_{x_0}/\omega)$ und dem Halbmesser $\varrho = v_0/\omega$. Geschieht auch hier der Eintritt ins bewegte System in der Richtung der x-Achse, so erhält man speziell $M\,(u/\omega,\ -c_0/\omega)$ und $\varrho = v_0/\omega$.

Aus

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \sqrt{-\omega^2 x^2 + 2\omega v_{y_0} x + v_{x_0}^2}$$

ergibt sich der zeitliche Verlauf der Relativbewegung

$$x = \frac{1}{\omega}\left[v_{y_0} + v_0 \sin(\omega t - \varrho)\right], \tag{15a}$$

wenn für $t = 0$ verlangt wird $x = y = 0$. Ebenso folgt aus

$$\frac{dy}{dt} = v_y = -\omega x + v_{y_0}$$

die Formel

$$y = \frac{1}{\omega}\left[v_{x_0} - v_0 \cos(\omega t - \varrho)\right]. \tag{15b}$$

Die Relativbahn wird demnach gleichförmig durchlaufen.

4. Graphische Methode. Obwohl bisher die Ergebnisse in geschlossener Form dargestellt werden konnten, soll doch ein graphisches Verfahren angegeben werden, das auch in allgemeineren Fällen durchführbar bleibt. Der Eintritt ins bewegte System geschehe im Koordinatenursprung 0 (Abb. 3), so daß sowohl Absolutbahn als auch Relativbahn im Koordinatenursprung 0 beginnen. Von einem festen Pol Π aus wird der Vektor $\mathfrak{c}_0$ der absoluten Eintrittsgeschwindigkeit abgetragen. Sein Endpunkt sei A_0'. Die relative Eintrittsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ ist dann als derjenige vom Pol Π ausgehende Vektor bestimmbar, zu dem der gegebene Vektor $\mathfrak{u}$ der Führungsgeschwindigkeit addiert den Vektor $\mathfrak{c}_0$ ergibt. R_0' sei der Endpunkt des vom Pol Π aus abgetragenen Vektors $\mathfrak{v}_0$ der relativen Eintrittsgeschwindigkeit. Werden im Koordinatenursprung 0 die Richtungen $\mathfrak{c}_0$ bzw. $\mathfrak{v}_0$ eingezeichnet, so erhält man dort die Tangenten an die absolute bzw. relative Bahn. Da die Absolutbeschleunigung wegen (5) zur Relativgeschwindigkeit senkrecht steht, zeichnet man durch A_0' eine Normale zu $\mathfrak{v}_0$ und erhält dadurch im Absoluthodographen H_{abs} die Tangente t_0 in A_0'. Für einen kleinen Schritt Δx_1 in der Richtung der Abszissenachse findet man auf den Tangenten an die absolute bzw. relative Bahn die Punkte A_1 bzw. R_1. Zu ihrer Abszisse $x_1 = \Delta x_1$ folgt aus (7) der Betrag c_1 der absoluten Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_1$. Der Kreis, dessen Halbmesser der Betrag c_1 der Absolutgeschwindigkeit $\mathfrak{c}_1$ und dessen Mittelpunkt der Pol Π ist, schneidet die Tangente t_0 des Absoluthodographen H_{abs} im Punkt A_1'. Damit ist $\mathfrak{c}_1 = \overrightarrow{\Pi A_1'}$ die Absolutgeschwindigkeit und daher für den Punkt A_1 die Tangente an die Absolutbahn gefunden. Weil die Führungsgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$, die ja stets die dem Pol Π gegenüberliegende Seite des Geschwindigkeitsdreiecks bildet, konstant ist, ist das Viereck $A_0' A_1' R_1' R_0'$ ein Parallelogramm. Der Vektor $\mathfrak{v}_1 = \overrightarrow{\Pi R_1'}$ ist die Relativgeschwindigkeit und ergibt für den Punkt R_1 die Tangente der Relativbahn.

Wird so weiter konstruiert, so ergibt jeder weitere Schritt Δx, in der Richtung der Abszissenachse auf den Tangenten in den Punkten A_{i-1} bzw. R_{i-1} an die Absolutbahn bzw. an die Relativbahn die Punkte A_i bzw. R_i. Stets werde wegen (5) in A_{i-1}' die Tangente t_{i-1} an den Absoluthodographen H_{abs} normal zur Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{i-1}$ gezeichnet. Zur Abszisse $x_i = \sum_{n=1}^{i} \Delta x_n$ ergibt (7) den Betrag c_i der Absolutgeschwindigkeit $\mathfrak{c}_i$, wofür man auf t_{i-1} den Punkt A_i' und dazu dann den Punkt R_i' findet. Es sind damit die Richtungen der Tangenten in A_i bzw. R_i an die

Absolutbahn bzw. Relativbahn ermittelt. Werden die Schritte Δx_i hinreichend klein gewählt, so erhält man im Streckenzug $O A_1 A_2 \dots A_i$ eine gute Näherung für die Absolutbahn, im Streckenzug $O R_1 R_2 \dots R_i$ eine gute Näherung für die Relativbahn, im Streckenzug $A_0' A_1' A_2' \dots A_i'$ eine gute Näherung für den Absoluthodographen H_{abs} und im Streckenzug $R_0' R_1' R_2' \dots R_i'$ eine gute Näherung für den Relativhodographen H_{rel}.

5. Beispiel. Das bewegte System werde von der Ordinatenachse und der zu ihr im Abstand $t = 0{,}12$ m parallelen Geraden begrenzt. Die zu $x = 0$ gehörige absolute Eintrittsgeschwindigkeit sei $c_0 = 2{,}16$ m/s. Der Eintritt ins bewegte System geschehe in der Richtung der Abszissenachse, daher ist $c_{x_0} = 2{,}16$ m/s und $c_{y_0} = 0$. Die Führungsgeschwindigkeit sei $u = 4{,}19$ m/s und habe die Richtung der negativen Ordinatenachse. Daher ist die relative Eintrittsgeschwindigkeit v_0 bestimmt durch $v_{x_0} = 2{,}16$ m/s und $v_{y_0} = 4{,}19$ m/s, und es ist $v_0 = \sqrt{v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2} = 4{,}71$ m/s. Für $x = t$ sei der Betrag c_e der absoluten Austrittsgeschwindigkeit c_e gegeben $c_e = 4{,}52$ m/s.

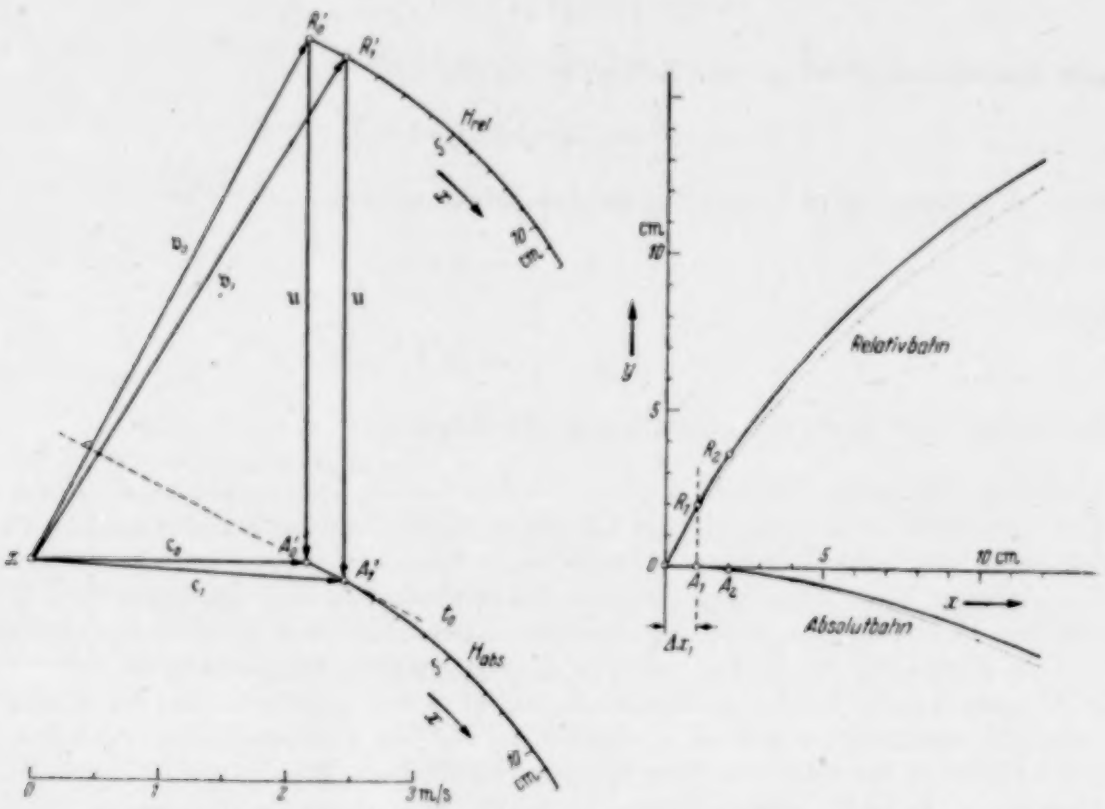

Abb. 3. Hodographen und Bahnkurven für eine Gleichdruckströmung in einer gleichförmig in sich selbst verschobenen Ebene.

Aus (7) erhält man wegen $c_e^2 = 2at + c_0^2$ für $t = 0{,}12$ m den Wert der Konstanten $a = 65{,}69$ m/s^2, und es ist wegen $a = u\omega$ der Wert der Konstanten $\omega = 15{,}68\ s^{-1}$. Die oben hergeleiteten Formeln ergeben für die Komponenten c_x und c_y der absoluten Geschwindigkeit c und für die Ordinaten y der Absolutbahn die Werte

x (m)	c_x (m/s)	c_y (m/s)	y (m)	x (m)	c_x (m/s)	c_y (m/s)	y (m)
0,00	2,16	0,000	− 0,0000	0,07	3,56	− 1,098	− 0,0125
0,01	2,44	− 0,157	− 0,0005	0,08	3,69	− 1,254	− 0,0158
0,02	2,68	− 0,314	− 0,0015	0,09	3,81	− 1,411	− 0,0194
0,03	2,90	− 0,471	− 0,0029	0,10	3,92	− 1,568	− 0,0232
0,04	3,09	− 0,627	− 0,0047	0,11	4,02	− 1,725	− 0,0274
0,05	3,26	− 0,784	− 0,0062	0,12	4,11	− 1,882	− 0,0318
0,06	3,42	− 0,941	− 0,0096				

In Abb. 3 sind Hodograph und Bahn für die Absolutbewegung und für die Relativbewegung dargestellt. Der Abb. 3, die die graphische Methode veranschaulicht, wurden dieselben Zahlenwerte wie in dem angegebenen Beispiel zugrunde gelegt. Das Ergebnis wird genauer, wenn

im Intervall Δx_i die Absolutbahn bzw. die Relativbahn nicht durch eine Strecke, die die Richtung $\mathfrak{c}_{i-1}$ bzw. $\mathfrak{v}_{i-1}$ hat, ersetzt wird, sondern dafür eine mittlere Richtung zwischen $\mathfrak{c}_{i-1}$ und $\mathfrak{c}_i$ bzw. zwischen $\mathfrak{v}_{i-1}$ und $\mathfrak{v}_i$ gewählt wird. Die Ergebnisse wurden dafür in Abb. 3 punktiert eingezeichnet. Obwohl die Schrittlänge ziemlich groß gewählt wurde (es war durchwegs $\Delta x_i = 1$ cm), so ist doch der Unterschied der graphisch erhaltenen Endordinaten gegenüber den genau errechneten sowohl bei der Absolutbahn als auch bei der Relativbahn geringer als 1 mm, was einem Fehler von weniger als 2 % entspricht.

6. Bewegung in einer gleichförmig in sich selbst rotierenden Ebene. In einer Ebene E (Abb. 4) seien die Punkte durch ihre Polarkoordinaten $r > 0$ und $0 \leqq \varphi < 360°$ festgelegt. Die im Pol 0 zur Ebene E normale z-Achse sei so orientiert, daß sie mit dem Sinn, in dem der Winkel φ gezählt wird, eine Rechtsschraubung festlegt. Die drei Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_3$, die in jedem Punkt beginnend in Richtung von r, normal zu r in Richtung der Zählung des Winkels φ und parallel zu z gezeichnet werden können, bilden dann ein Rechtssystem. Die Relativbewegung sei auf die Ebene E beschränkt. Die Relativgeschwindigkeit sei

$$\mathfrak{v} = v_r \mathfrak{e}_1 + v_u \mathfrak{e}_2 .$$

Dieses System sei einer gleichförmigen Rotation um die Drehachse z unterworfen. Die Drehung geschehe entgegengesetzt dem Sinn, in dem der Winkel φ gezählt wurde, mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit w. Für jeden Punkt in E ist daher die Führungsgeschwindigkeit

$$\mathfrak{u} = -u \mathfrak{e}_2 = -r w \mathfrak{e}_2 \qquad (w > 0) .$$

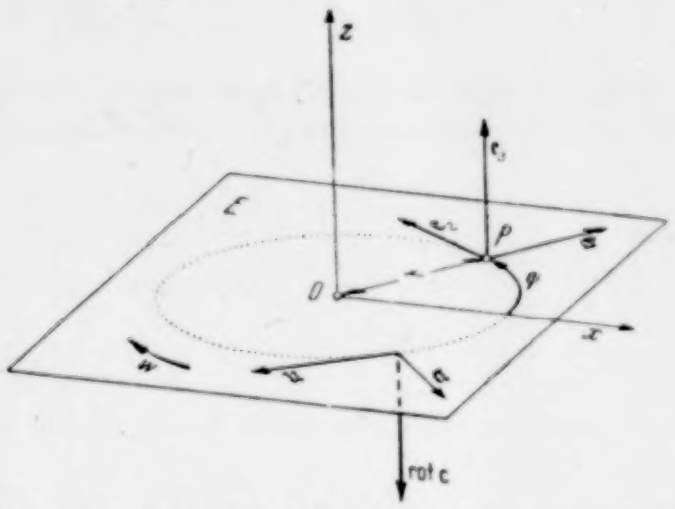

Abb. 4. Bewegung in einer gleichförmig in sich selbst rotierenden Ebene. Koordinatensystem mit Einheitsvektoren.

Es liegt dann auch die Absolutgeschwindigkeit $\mathfrak{c} = c_r \mathfrak{e}_1 + c_u \mathfrak{e}_2$ in der Ebene E, und es ist wegen (3) $c_r = v_r$ und $c_u = v_u - r w$. Weil c_r und c_u von z nicht abhängen, ergibt sich

$$\operatorname{rot} \mathfrak{c} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r c_u)}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial c_r}{\partial \varphi}\right) \mathfrak{e}_3 = -\frac{\omega}{r} \mathfrak{e}_3$$

als Vektor normal zur Ebene E, wobei ω die Dimension einer Geschwindigkeit hat. Es ist daher $[\mathfrak{u}, \operatorname{rot} \mathfrak{c}] = \mathfrak{a} = a \mathfrak{e}_1$ ein Vektor, der die Richtung des Fahrstrahls r hat, und es ist

$$|a| = u \frac{|\omega|}{r} = w |\omega| .$$

Wird, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, a positiv vorausgesetzt, so ist auch ω positiv.

Für das Folgende werde a konstant gefordert, dann ist auch ω konstant. Gleichung (6) hat dann die Form

$$\frac{1}{2} \frac{d \mathfrak{c}^2}{d r} = a ,$$

woraus sich

$$\mathfrak{c}^2 = 2 a r + b \tag{16}$$

ergibt. Das Quadrat der Absolutgeschwindigkeit ist also eine lineare Funktion des Fahrstrahls r. Die Forderung, daß a konstant ist, hat demnach eine gleichförmige Zunahme der Bewegungsenergie in der Richtung des Fahrstrahls zur Folge.

Gehört zu $r = r_0$ die absolute Eintrittsgeschwindigkeit

$$\mathfrak{c}_0 = c_{r_0} \mathfrak{e}_1 + c_{u_0} \mathfrak{e}_2 ,$$

so erhält man für die Integrationskonstante b den Wert

$$b = c_0^2 - 2 a r_0 = c_0^2 - 2 r_0 w \omega = c_0^2 - 2 u_0 \omega .$$

Aus

$$\mathfrak{c}^2 = c_r^2 + c_u^2 = 2\,a\,r + b$$

ergeben sich die Differentialgleichungen

$$c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} + c_u \frac{\partial c_u}{\partial r} = a \tag{17a}$$

und

$$c_r \frac{\partial c_r}{\partial \varphi} + c_u \frac{\partial c_u}{\partial \varphi} = 0\,. \tag{17b}$$

Nimmt man dazu noch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial c_r}{\partial \varphi} - r \frac{\partial c_u}{\partial r} - c_u = \omega\,, \tag{17c}$$

die man aus

$$\operatorname{rot} \mathfrak{c} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\,c_u)}{\partial r} - \frac{\partial c_r}{\partial \varphi}\right) \mathfrak{e}_3 = -\frac{\omega}{r}\,\mathfrak{e}_3$$

erhält, so folgen für die Komponenten c_r und c_u der Absolutgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ die linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(c_u + \omega)\sqrt{-c_u^2 + 2\,a\,r + b} + r\sqrt{-c_u^2 + 2\,a\,r + b}\,\frac{\partial c_u}{\partial r} + c_u \frac{\partial c_u}{\partial \varphi} = 0 \tag{18}$$

und

$$-a - \frac{c_u + \omega}{r}\sqrt{-c_r^2 + 2\,a\,r + b} + c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\sqrt{-c_r^2 + 2\,a\,r + b}\,\frac{\partial c_r}{\partial \varphi} = 0\,. \tag{19}$$

Für

$$c_r = \sqrt{-c_u^2 + 2\,a\,r + b} = 0$$

liegt eine Bewegung auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt der Koordinatenursprung 0 ist, vor. Aus (17c) folgt

$$c_u = \frac{\alpha}{r} - \omega\,,$$

weshalb sich aus

$$c_u^2 = 2\,a\,r + b = \frac{\alpha^2}{r^2} - 2\,\frac{\alpha\,\omega}{r} + \omega^2$$

die Werte

$$a = 0,\ \text{d. h.}\ c_u^2 = b = \text{konst.}$$

und

$$\omega = 0,\ \text{d. h.}\ b = 0$$

ergeben. Es findet also keine Absolutbewegung statt, sondern im Absolutsystem liegt Ruhe vor.

Für

$$c_u = \sqrt{-c_r^2 + 2\,a\,r + b} = 0$$

liegt eine geradlinige Bewegung auf den durch den Koordinatenursprung 0 gehenden Geraden vor. Aus (17c) folgt $\omega = 0$, d. h. $a = 0$. Die Bewegung ist daher gleichförmig mit der Geschwindigkeit, die sich aus $c_r^2 = b$ ergibt. Wenn

$$\sqrt{-c_u^2 + 2\,a\,r + b} \neq 0$$

ist, so ist die Differentialgleichung (18) äquivalent dem System

$$\frac{d\,c_u}{d\,r} = -\frac{c_u + \omega}{r}\,, \tag{18a}$$

$$\frac{d\,r}{d\,\varphi} = \frac{r\sqrt{-c_u^2 + 2\,a\,r + b}}{c_u}\,. \tag{18b}$$

Die Lösung von (18a) ist

$$c_u = \frac{\alpha}{r} - \omega\,, \tag{19a}$$

deren Integrationskonstante für $r = r_0$ sich in der Form

$$\alpha = r_0(c_{u_0} + \omega)$$

ergibt. Für c_r folgt dann

$$c_r = \sqrt{2\,a\,r + b - \left(\frac{\alpha}{r} - \omega\right)^2}\,. \tag{19b}$$

Wird (19a) in (18b) eingesetzt, so erhält man

$$d\varphi = \frac{(\alpha - r\omega)\,dr}{r\sqrt{2ar^3 + br^2 - (\alpha - r\omega)^2}}\,. \tag{20}$$

Für $a \neq 0$ und $\alpha \neq 0$ liegt daher ein elliptisches Integral vor, und es wird zur Bestimmung der Absolutbahn eine graphische Methode erwünscht sein.

Wegen (3) kann die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bestimmt werden aus

$$c^2 = (\mathfrak{v}+u)^2 = \mathfrak{v}^2 + 2u\mathfrak{v} + u^2 = \mathfrak{v}^2 - 2rwv_u + r^2w^2 = 2ar + b.$$

Wegen (19a) erhält man

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}^2 &= 2ar + b + 2rw(c_u + rw) - r^2w^2 = 2ar + b + r^2w^2 + 2rw\left(\frac{\alpha}{r} - \omega\right)\\ &= c_0^2 - 2u_0\omega + r^2w^2 + 2wr_0(c_{u_0} + \omega)\\ &= r^2w^2 + c_0^2 + 2u_0c_{u_0}\,.\end{aligned}$$

Es ist also

$$\mathfrak{v}^2 - u^2 = \mathfrak{v}_0^2 - u_0^2 = \text{konst.} \tag{21}$$

Geschieht der Eintritt ins bewegte System in der Richtung des Fahrstrahls, so ist speziell $\mathfrak{v}^2 - u^2 = c_0^2$.

Aus (3) und (19a, b) erhält man für die Komponenten der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$

$$v_r = c_r = \sqrt{2ar + b - \left(\frac{\alpha}{r} - \omega\right)^2}\,, \tag{22a}$$

$$v_u = c_u + rw = rw + \frac{\alpha}{r} - \omega\,. \tag{22b}$$

Für die Relativbahn folgt aus

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{rv_r}{v_u}$$

die Gleichung

$$d\varphi = \frac{r^2w - r\omega + \alpha}{r\sqrt{2ar^3 + br^2 - (\alpha - r\omega)^2}}\,dr\,. \tag{23}$$

Wieder tritt für $a \neq 0$ und $a \neq 0$ ein elliptisches Integral auf, und es wird sich auch für die Bestimmung der Relativbahn eine graphische Methode empfehlen.

In einem Sonderfall erhält man besonders einfache Ergebnisse. Ist nämlich speziell $\omega = -c_{u_0}$, so verschwindet in (19a) die Integrationskonstante α, und es ist dann $c_u = -\omega = c_{u_0}$, also konstant. Gleichung (19b) geht über in $c_r = \sqrt{2ar + b - \omega^2} = \sqrt{2ar + b - c_{u_0}^2}$. Die Differentialgleichung, die aus (20) folgt,

$$d\varphi = \frac{c_{u_0}\,dr}{r\sqrt{2ar + b - c_{u_0}^2}}\,,$$

hat dann die Lösung

$$\frac{ar + \delta - \sqrt{(2ar + \delta)\delta}}{A\,ar} = e^{\frac{\sqrt{\delta}}{c_{u_0}}\cdot\varphi}\,,$$

wobei $\delta = b - c_{u_0}^2$ gesetzt wurde. Die Integrationskonstante A erhält man für die Anfangswerte $\varphi = 0$ und $r = r_0$ zu

$$A = \frac{ar_0 + \delta - \sqrt{(2ar_0 + \delta)\delta}}{ar_0 e}\,.$$

Ist außerdem speziell $\delta = b - c_{u_0}^2 = 0$, so ist $c_r = \sqrt{2ar}$, und aus (20) folgt die Differentialgleichung $d\varphi = \frac{c_{u_0}\,dr}{r\sqrt{2ar}}$, deren Lösung

$$\varphi = \sqrt{\frac{2c_{u_0}}{-w}}\left(\frac{1}{\sqrt{r_0}} - \frac{1}{\sqrt{r}}\right)$$

für die Anfangsbedingung $\varphi = 0$ und $r = r_0$ die Gleichung der Absolutbahn darstellt. Für die Relativbahn erhält man, wenn wieder speziell $\omega = -c_{u_0}$ ist,

$$\frac{ar + \delta - \sqrt{(2ar + \delta)\delta}}{B\,ar} = e^{-\frac{1}{c_{u_0}}(\varphi\sqrt{\delta} + \sqrt{2ar + \delta})}$$

mit der Integrationskonstanten

$$B = \frac{a r_0 + \delta - \sqrt{(2 a r_0 + \delta)\delta}}{a r_0} \; e^{\frac{1}{c_{u_0}} \sqrt{2 a r_0 + \delta}}$$

für $\varphi = 0$ und $r = r_0$ als Anfangsbedingungen. Ist wieder speziell $\delta = 0$, so ist

$$\frac{w r - c_{u_0}}{\sqrt{r}} = \sqrt{-\frac{w c_{u_0}}{2}}\, \varphi + \frac{w r_0 - c_{u_0}}{\sqrt{r_0}}$$

die Gleichung der Relativbahn für $\varphi = 0$ und $r = r_0$ als Anfangsbedingungen.

7. Graphische Methode. Die Komponenten c_r und c_u der Absolutgeschwindigkeit c bestimmen die Richtung der Absolutgeschwindigkeit c gegenüber dem jeweiligen Fahrstrahl r. Da sich die Richtung des Fahrstrahls r aber beim Durchlaufen der Absolutbahn von Punkt zu Punkt ändert, ist die Richtung der Absolutgeschwindigkeit selbst ohne Kenntnis der Absolutbahn durch die Komponenten c_r und c_u nicht gegeben. Dasselbe gilt für die Relativgeschwindigkeit v.

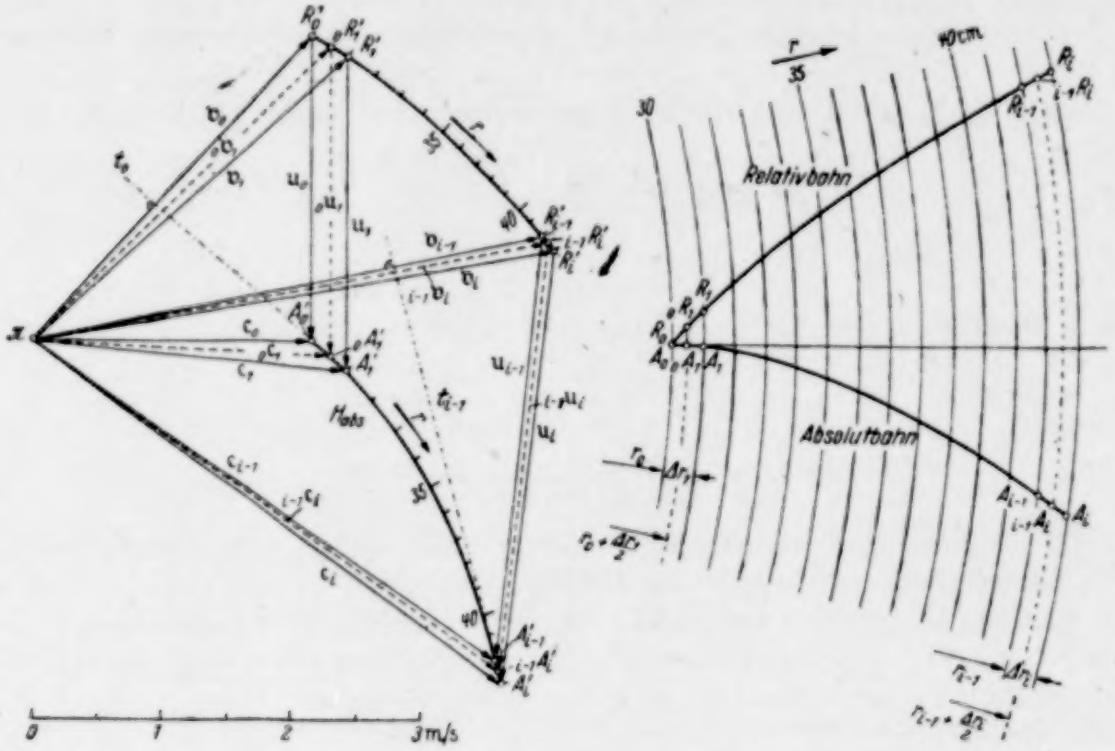

Abb. 5. Bahnkurven für eine Gleichdruckströmung in einer gleichförmig in sich selbst rotierenden Ebene.

Die Bestimmung der Hodographen für die Absolutbewegung und die Relativbewegung ist daher unabhängig von der Ermittlung der absoluten und der relativen Bahn nicht möglich. Es muß also gleichzeitig an den Bahnkurven und an den Hodographen gezeichnet werden.

Der Eintritt ins bewegte System geschehe im Punkt $A_0 \equiv R_0$, der durch die Koordinaten $\varphi_0 = 0$ und $r = r_0$ bestimmt ist (Abb. 5), so daß sowohl Absolutbahn als auch Relativbahn dort beginnen. Von einem festen Pol Π aus wird der Vektor c_0 der absoluten Eintrittsgeschwindigkeit abgetragen. Sein Endpunkt sei A_0'. Die relative Eintrittsgeschwindigkeit v_0 ist dann als derjenige vom Pol Π ausgehende Vektor bestimmbar, zu dem der zum Punkt A_0 gehörige Vektor $u_0 = -r_0 w e_2$ der Führungsgeschwindigkeit, der normal zu $\overline{OA_0}$ steht, addiert den Vektor c_0 ergibt. R_0' sei der Endpunkt des vom Pol Π aus abgetragenen Vektors v_0 der relativen Eintrittsgeschwindigkeit. Werden in A_0 bzw. R_0 die Richtungen c_0 bzw. v_0 eingezeichnet, so erhält man dort die Tangenten an die absolute bzw. relative Bahn. Da die Absolutbeschleunigung wegen (5) zur Relativgeschwindigkeit senkrecht steht, zeichnet man durch A_0' eine Normale zu v_0 und erhält damit im Absoluthodographen H_{abs} die Tangente t_0 in A_0'. Für einen kleinen Zuwachs Δr_1 des Radius r_0 findet man auf den Tangenten an die absolute bzw. relative Bahn die Punkte A_1 bzw. R_1. Der Punkt A_1 kann noch verbessert werden. Zu $r = r_0 + \frac{\Delta r_1}{2}$ erhält man aus (16) einen Wert ${}_0c_1$. Der Kreis, dessen Halbmesser der Betrag ${}_0c_1$ der Absolutgeschwindigkeit ${}_0c_1$, und

dessen Mittelpunkt der Pol Π ist, schneidet die Tangente t_0 des Absoluthodographen H_{abs} im Punkt ${}_0A_1'$. Wird die Richtung des Vektors ${}_0c_1=\overrightarrow{\Pi_0 A_1'}$ vom Punkt A_0 aus abgetragen, so erhält man auf dem Kreis, dessen Mittelpunkt der Koordinatenursprung 0 und dessen Radius $r_1=r_0+\Delta r_1$ ist, den verbesserten Punkt A_1.

Auf der Tangente $\overline{A_0 A_1}$ an die Absolutbahn liegt der zum Fahrstrahl $r=r_0+\frac{\Delta r_1}{2}$ gehörige Punkt ${}_0A_1$. Im Punkt ${}_0A_1'$ des Absoluthodographen H_{abs} endet der Vektor der Führungsgeschwindigkeit ${}_0u_1=-\left(r_0+\frac{\Delta r_1}{2}\right)w\mathfrak{e}_2$, der normal zu $\overline{O_0 A_1}$ gezeichnet werden muß. Sein Anfangspunkt ${}_0R_1'$ bestimmt den Vektor ${}_0v_1=\overrightarrow{\Pi_0 R_1'}$ der Relativgeschwindigkeit. Auf der in R_0 gezeichneten Tangente an die Relativbahn liegt der dem Punkt ${}_0A_1$ der Absolutbahn entsprechende Punkt ${}_0R_1$. Wird nun das Koordinatensystem um den Ursprung 0 so lange gedreht, bis dieser Punkt ${}_0R_1$ in die frühere Lage des Punktes ${}_0A_1$ kommt, dann liefert die von der neuen Lage des Punktes R_0 ausgehende parallel zum Vektor ${}_0v_1$ gezeichnete Gerade den verbesserten Punkt R_1. Das Koordinatensystem, in dem der Hodograph eingezeichnet wird, macht dabei die Drehung nicht mit. Die Verbesserung des Punktes R_1 kann eventuell noch mehrmals wiederholt werden.

So wird schrittweise weiter konstruiert. Auf dem Kreis mit dem Halbmesser $r_{i-1}=r_0+\sum_{n=1}^{i-1}\Delta r_n$ und dem Koordinatenursprung 0 als Mittelpunkt seien die Punkte A_{i-1} bzw. R_{i-1} der Absolutbahn bzw. der Relativbahn bereits bestimmt worden. Im Absoluthodographen H_{abs} gehöre dazu der Punkt A_{i-1}'. Durch A_{i-1} wird parallel zum Vektor $\mathfrak{c}_{i-1}=\overrightarrow{\Pi A_{i-1}'}$ die Tangente an die Absolutbahn gezeichnet. Auf ihr findet man für einen kleinen Zuwachs Δr_i des Fahrstrahls r_{i-1} den Punkt A_i der Absolutbahn. Normal zu $\overline{O A_{i-1}}$ wird im Punkt A_{i-1}' des Absoluthodographen H_{abs} die zugehörige Führungsgeschwindigkeit $u_{i-1}=-r_{i-1}w\mathfrak{e}_2$ eingezeichnet, deren Anfangspunkt R_{i-1}' ist. Zu $\overline{\Pi R_{i-1}'}$ normal steht wegen (5) die Absolutbeschleunigung, d. h. die Tangente t_{i-1} an den Absoluthodographen H_{abs} im Punkte A_{i-1}'. Soll der Punkt A_i der Absolutbahn verbessert werden, so bestimmt man zu $r=r_{i-1}+\frac{\Delta r_i}{2}$ aus (16) den Wert ${}_{i-1}\mathfrak{c}_i$. Der Kreis, dessen Halbmesser der Betrag ${}_{i-1}c_i$ der Absolutgeschwindigkeit ${}_{i-1}\mathfrak{c}_i$, und dessen Mittelpunkt der Pol Π ist, schneidet die Tangente t_{i-1} des Absoluthodographen H_{abs} im Punkt ${}_{i-1}A_i'$. Wird die Richtung des Vektors ${}_{i-1}\mathfrak{c}_i=\overrightarrow{\Pi_{i-1}A_i}$ vom Punkt A_{i-1} aus abgetragen, so erhält man auf dem Kreis, dessen Mittelpunkt der Koordinatenursprung 0 und dessen Halbmesser $r_i=r_{i-1}+\Delta r_i$ ist, den verbesserten Punkt A_i.

Auf der Tangente $\overline{A_{i-1}A_i}$ an die Absolutbahn liegt der zum Fahrstrahl $r=r_{i-1}+\frac{\Delta r_i}{2}$ gehörige Punkt ${}_{i-1}A_i$. Im Punkt ${}_{i-1}A_i'$ des Absoluthodographen H_{abs} endet der Vektor der Führungsgeschwindigkeit ${}_{i-1}u_i=-\left(r_{i-1}+\frac{\Delta r_i}{2}\right)w\mathfrak{e}_2$, der normal zu $\overline{O_{i-1}A_i}$ gezeichnet werden muß. Sein Anfangspunkt ${}_{i-1}R_i'$ bestimmt den Vektor ${}_{i-1}v_i=\overrightarrow{\Pi_{i-1}R_i'}$ der Relativgeschwindigkeit. Wird das Koordinatensystem um seinen Ursprung 0 solange gedreht, bis der Punkt R_{i-1} dorthin kommt, wo der Punkt A_{i-1} vor der Drehung lag, so kann man parallel zum Vektor v_{i-1} die Tangente an die Relativbahn im Punkt R_{i-1} zeichnen und erhält auf ihr für $r=r_{i-1}+\Delta r_i$ den Punkt R_i. Dieser Punkt R_i kann verbessert werden. Auf $\overline{R_{i-1}R_i}$ liegt für $r=r_{i-1}+\frac{\Delta r_i}{2}$ der Punkt ${}_{i-1}R_i$. Wird das Koordinatensystem um seinen Ursprung 0 so lange gedreht, bis der Punkt ${}_{i-1}R_i$ dorthin kommt, wo vor der Drehung der Punkt ${}_{i-1}A_i$ lag, so kann parallel zum Vektor ${}_{i-1}v_i$ durch den Punkt R_{i-1} die verbesserte Tangente an die Relativbahn gezeichnet werden, auf der für $r=r_{i-1}+\Delta r_i$ der verbesserte Punkt R_i liegt. Die Verbesserung des Punktes R_i kann eventuell noch mehrmals wiederholt werden.

Werden die Schritte Δr_i hinreichend klein gewählt, so erhält man im Streckenzug $A_0, A_1, A_2, \ldots A_i$ eine gute Näherung für die Absolutbahn, im Streckenzug $R_0, R_1, R_2, \ldots R_i$ eine gute Näherung für die Relativbahn, im Streckenzug $A_0', A_1', A_2', \ldots A_i'$ eine gute Näherung für den Absoluthodographen H_{abs}, während der Streckenzug $R_0', R_1', R_2', \ldots R_i'$ nicht den Relativhodographen annähert.

Unbequem ist an dem entwickelten Verfahren die Tatsache, daß das Koordinatensystem zur Bestimmung der Relativbahn stets um seinen Ursprung 0 gedreht werden muß. Deshalb soll noch ein anderes graphisches Verfahren angegeben werden.

Werden in einem rechtwinkligen Koordinatensystem (Abb. 6) c_u als Abszisse und c_r als Ordinate eines Punktes aufgefaßt, so ist mit r als Parameter (19a und 19b) die Parameterdarstellung einer Kurve dritter Ordnung, deren Gleichung

$$(\xi^2+\eta^2)\,(\eta+\omega)+\eta\,(2\,u_0\omega-c_0^2)=\omega\,(v_0^2-u_0^2) \tag{24}$$

ist. Die Kurve soll als absolute Normkurve N_{abs} bezeichnet werden. Im Sonderfall $\omega=-c_{u_0}$ artet die absolute Normkurve N_{abs} in eine zur Abszissenachse parallele Gerade aus.

Werden im selben Koordinatensystem v_u als Abszisse und v_r als Ordinate eines Punktes aufgefaßt, so ist mit r als Parameter (22a und 22b) die Parameterdarstellung einer Kurve vierter Ordnung, deren Gleichung

$$(\xi^2+\eta^2-v_0^2+u_0^2)\,(\eta+\omega)^2=[\xi^2+\eta^2-v_0^2+u_0^2+u_0\,(\omega+c_{u_0})]^2$$

ist. Diese Kurve soll als relative Normkurve N_{rel} bezeichnet werden. Im Sonderfall $\omega=-c_{u_0}$ artet die relative Normkurve N_{rel} in eine Parabel

$$\xi^2=-2\,c_{u_0}\left(\eta-\frac{c_{u_0}^2+v_0^2-u_0^2}{2\,c_{u_0}}\right)$$

aus, deren Achse die Ordinatenachse ist.

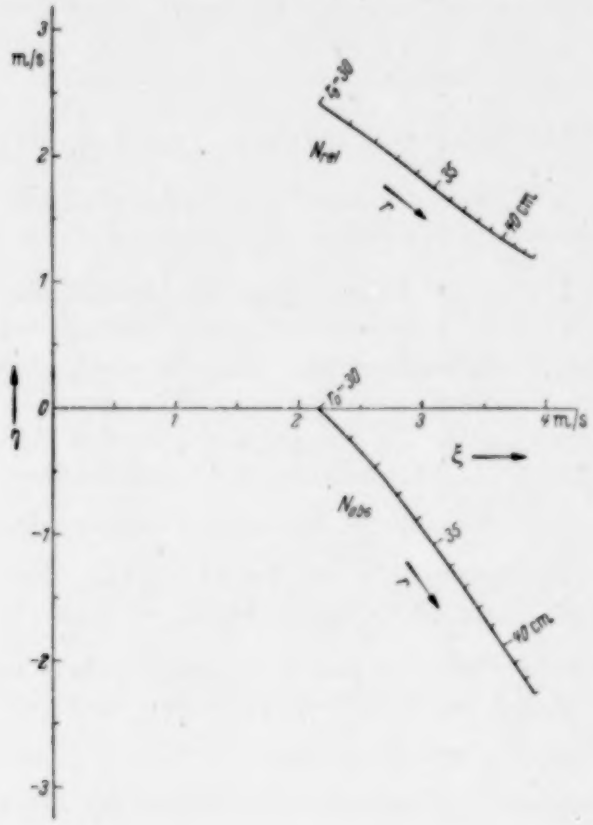

Abb. 6. Absolute und relative Normkurve für eine Gleichdruckströmung in einer gleichförmig in sich selbst rotierenden Ebene.

Die Punkte der absoluten und der relativen Normkurven sollen mit den Werten des Parameters r beziffert werden. Zur Zeichnung der Normkurven kann stets von den Beziehungen (17) bzw. (21) Gebrauch gemacht werden.

Zur Bestimmung der absoluten und der relativen Bahn kann mit Vorteil ein Gerät verwendet werden, das auf einer festen Platte ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung 0 trägt. Darüber ist drehbar um 0 eine durchsichtige Scheibe befestigt, auf der ein Polarkoordinatennetz aufgezeichnet ist. Ein ähnliches Gerät verwendet man beim *Moltschanoff*schen Verfahren zur Auswertung der Höhenwindmessung mittels Pilotballon in der Meteorologie.

Im Koordinatensystem auf der festen Platte werden die Normkurven N_{abs} und N_{rel} gezeichnet. Der Anfangspunkt $A_0=R_0$ $(r=r_0,\ \varphi=0)$ wird im Koordinatensystem auf der drehbaren durchsichtigen Scheibe eingezeichnet. Die Scheibe wird nun so gedreht, daß der Punkt $A_0=R_0$ auf die Abszissenachse der festen Platte zu liegen kommt. Die Gerade vom Koordinatenursprung zu dem mit $r=r_0$ bezifferten Punkt der absoluten (relativen) Normkurve N_{abs} (N_{rel}) bestimmt die Richtung der Tangente in $A_0(R_0)$ an die absolute (relative) Bahn. Auf ihr liegt für $r_1=r_0+\Delta r_1$ der Punkt $A_1(R_1)$ der absoluten (relativen) Bahn. Wird die Scheibe so gedreht, daß der Punkt $A_1(R_1)$ auf die Abszissenachse der festen Platte zu liegen kommt, so bestimmt die Gerade vom Koordinatenursprung zu dem mit $r_1=r_0+\Delta r_1$ bezifferten Punkt der absoluten (relativen) Normkurve N_{abs} (N_{rel}) die Richtung der Tangente in $A_1(R_1)$ an die absolute (relative) Bahn. So fortschreitend, erhält man für hinreichend kleine Schritte Δr_i im Streckenzug $A_0, A_1, A_2, \ldots A_i$ eine gute Näherung für die Absolutbahn und im Streckenzug $R_0, R_1, R_2, \ldots R_i$ eine gute Näherung für die Relativbahn.

Wenn überhaupt ohne bewegliches Koordinatensystem gearbeitet werden soll, so empfiehlt sich folgendes Verfahren (Abb. 7). Die absolute Normkurve N_{abs} wird gezeichnet. Die durch ihre mit r bezifferten Punkte gehenden konzentrischen Kreise, deren Mittelpunkt der Koordinatenursprung H ist, bilden eine Schar und werden mit den jeweiligen Werten des Parameters r beziffert. Durch Drehung der absoluten Normkurve N_{abs} im Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung H entsteht eine zweite Kurvenschar, deren Kurven mit den entsprechenden Werten des Drehwinkels φ beziffert werden. Analog erhält man ein zweites Kurvennetz, wenn die relative Normkurve N_{rel} im Gegenuhrzeigersinn um den Koordinatenursprung H gedreht wird, dessen Kurven mit den entsprechenden Werten von r bzw. den Werten des Drehwinkels ψ beziffert

werden. Die Achse Ox eines Polarkoordinatensystems wird parallel zur Abszissenachse $\Pi\xi$ gezeichnet. Von ihr beginnend wird im Uhrzeigersinn der Winkel φ und im Gegenuhrzeigersinn der Winkel ψ gemessen. Dann ist das Richtungsfeld für die Absolutbahn dadurch bestimmt, daß jedem Punkt A_i ($\varphi=\varphi_i$, $r=r_i$) im Absolutkurvennetz ein Punkt A_i' zugeordnet ist, dessen Verbindungsgerade mit dem Koordinatenursprung Π die Richtung der Tangente in A_i festlegt. Das Richtungsfeld für die Relativbahn ist dadurch bestimmt, daß jedem Punkt R_i($\psi=\psi_i$, $r=r_i$) im Relativkurvennetz ein Punkt R_i' zugeordnet ist, dessen Verbindungsgerade mit dem Koordinatenursprung Π die Richtung der Tangente in R_i festlegt. So erhält man im Punkte $A_0=R_0(\varphi=\psi=0,\ r=r_0)$ beginnend und stets in kleinen Schritten Δr_i fortschreitend als Ort von A_i die Absolutbahn, als Ort von R_i die Relativbahn, als Ort von A_i' den Absoluthodographen H_{abs} und als Ort von R_i' den Relativhodographen H_{rel}. Wieder kann die Näherung für

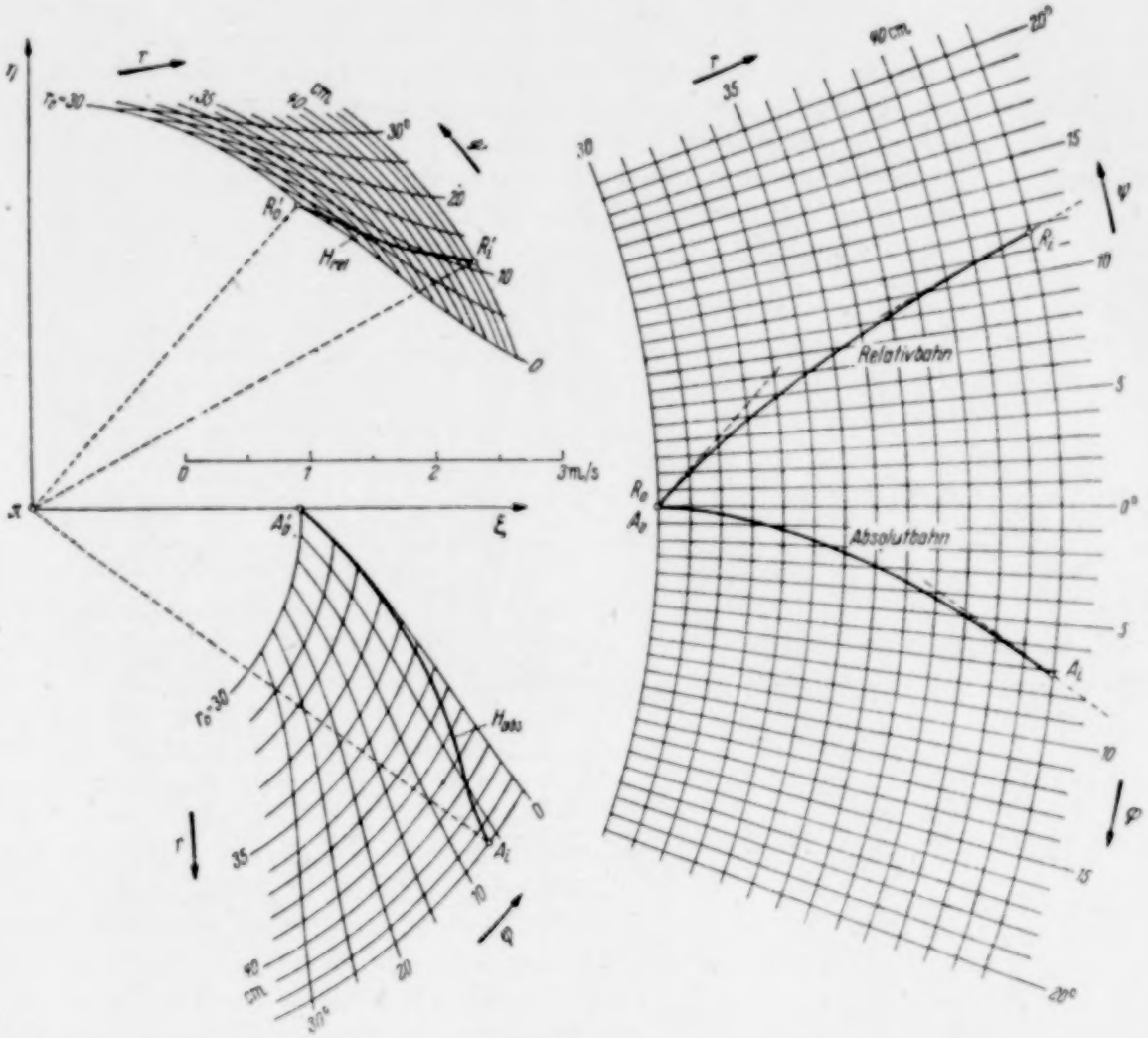

Abb. 7. Hodographen und Bahnkurven für eine Gleichdruckströmung in einer gleichförmig in sich selbst rotierenden Ebene.

die Absolutbahn verbessert werden, wenn man nach Bestimmung der Punkte $A_i(\varphi_i, r_i)$ und $A_{i+1}(\varphi_{i+1}, r_{i+1})$ im Absolutnetz die Richtung $\Pi\ {}_iA_{i+1}'\left({}_i\varphi_{i+1}=\frac{\varphi_i+\varphi_{i+1}}{2},\ {}_ir_{i+1}=\frac{r_i+r_{i+1}}{2}\right)$ ermittelt und diese in A_i beginnend zur Verbesserung von A_{i+1} verwendet. Diese Verbesserung kann eventuell mehrmals wiederholt werden. Ganz entsprechend kann auch die Relativbahn verbessert werden.

8. Beispiel. Den Abb. 5, 6 und 7 liegen folgende Annahmen zugrunde: Das bewegte System bestehe aus dem Kreisring zwischen $r_0=0{,}30$ m und $r_e=r_0+t=0{,}43$ m ($t=0{,}13$ m). Die zu $r=r_0$ gehörige absolute Eintrittsgeschwindigkeit sei $c_0=2{,}16$ m/s. Der Eintritt ins bewegte System geschehe in der Richtung des Fahrstrahles r, daher ist $c_{r_0}=2{,}16$ m/s und $c_{u_0}=0$. Die gegebene konstante Winkelgeschwindigkeit für die Drehung des bewegten Systems sei $w=8{,}058$ l/s. Daher ist die Führungsgeschwindigkeit für den Eintritt ins bewegte System $u_0=2{,}42$ m/s. Für die relative Eintrittsgeschwindigkeit v_0 ergibt sich dann $v_{r_0}=2{,}16$ m/s und $v_{u_0}=2{,}42$ m/s und

es ist $v_0 = \sqrt{v_{r0}^2 + v_{u0}^2} = 3{,}24$ m/s. Für $r_e = 0{,}43$ m sei der Betrag der absoluten Austrittsgeschwindigkeit c_e gegeben $c_e = 4{,}52$ m/s. Aus (16) erhält man wegen $c_0^2 = 2\,c r_0 + b$ und $c_e^2 = 2\,a r_e + b$ den Wert der Konstanten $a = 60{,}63$ m/s² und $b = -31{,}71$ m²/s². Aus $a = w \cdot \omega$ folgt $\omega = 7{,}52$ m/s. Die oben hergeleiteten Formeln ergeben für die Komponenten der Geschwindigkeiten die folgenden Werte:

r	u	$c_r = v_r$	c_u	v_u	r	u	$c_r = v_r$	c_u	v_u
(m)	(m/s)	(m/s)	(m/s)	(m/s)	(m)	(m/s)	(m/s)	(m/s)	(m/s)
0,30	2,42	2,16	0	2,42	0,37	2,98	3,33	− 1,42	1,56
0,31	2,50	2,41	− 0,24	2,26	0,38	3,06	3,44	− 1,58	1,48
0,32	2,58	2,62	− 0,47	2,11	0,39	3,14	3,55	− 1,74	1,41
0,33	2,66	2,80	− 0,68	1,98	0,40	3,22	3,64	− 1,88	1,34
0,34	2,74	2,96	− 0,89	1,86	0,41	3,30	3,73	− 2,02	1,29
0,35	2,82	3,09	− 1,07	1,75	0,42	3,38	3,82	− 2,15	1,23
0,36	2,90	3,22	− 1,25	1,65	0,43	3,67	3,91	− 2,27	1,19

Mit diesen Werten wurde die oben besprochene Ermittlung der Absolutbahn und der Relativbahn durchgeführt. Eine rechnerische Kontrolle der so graphisch erhaltenen Ergebnisse würde die Berechnung der elliptischen Integrale (20) und (23) erfordern und auf trigonometrische Integrale und auf *Legendre*sche Normalintegrale erster und dritter Gattung führen.

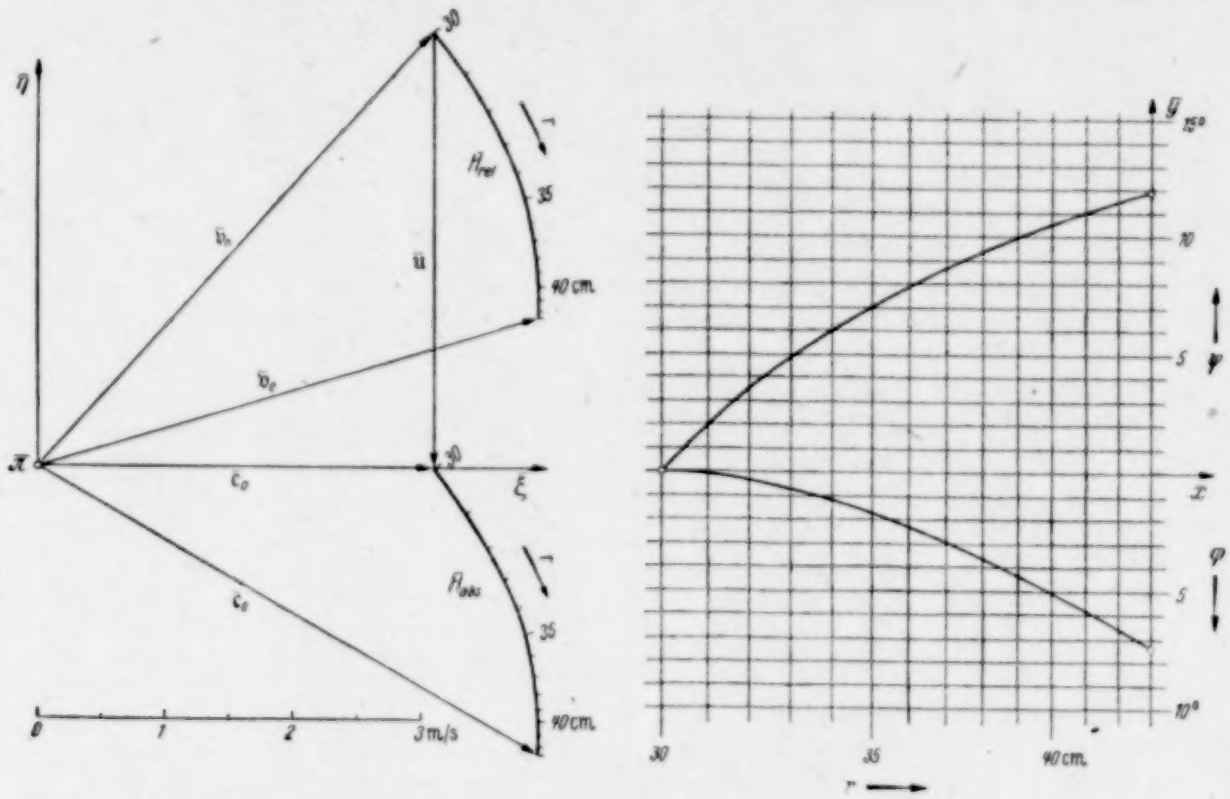

Abb. 8. Konforme Abbildung zur Bestimmung der Bahnkurven für eine Gleichdruckströmung in einer gleichförmig in sich selbst rotierenden Ebene.

9. Graphische Lösung mit Hilfe konformer Abbildung. Die graphische Lösung kann anstatt im Polarkoordinatensystem auch in kartesischen Koordinaten durchgeführt werden. Die Transformation

$$\bar{x} = \varrho \log \frac{r}{\varrho}, \qquad \bar{y} = \varrho\,\varphi,$$

wobei ϱ eine willkürlich zu wählende, nur den Maßstab beeinflussende Konstante ist, führt die konzentrischen Kreise um den Koordinatenursprung O des Polarkoordinatensystems über in die Schar der zur Ordinatenachse parallelen Geraden (Abb. 8) und das Geradenbüschel mit dem Scheitel 0 über in die zur Abszissenachse parallelen Geraden. Die Geraden beider Parallelstrahlenbüschel sollen mit den ihnen entsprechenden Werten von r bzw. φ beziffert werden. Die Abbildung ist konform. Zu einer Geschwindigkeit v im ursprünglichen Polarkoordinatensystem erhält man die entsprechende Geschwindigkeit $\bar{v}$ im kartesischen Koordinatensystem durch

$$\bar{v} = \frac{\varrho}{r}\,v.$$

Man erhält für die Absolutgeschwindigkeit

$$\overline{c}^2 = \frac{\varrho^2}{r^2}(2ar + b),$$

für ihre Komponente parallel zur Ordinatenachse

$$\overline{c}_y = \frac{\varrho}{r} c_u = \frac{\varrho}{r}\left(\frac{\alpha}{r} - \omega\right)$$

und für ihre Komponente parallel zur Abszissenachse

$$\overline{c} = \frac{\varrho}{r} c_r = \frac{\varrho}{r}\sqrt{2ar + b - \left(\frac{\alpha}{r} - \omega\right)^2}.$$

Analog ergeben sich die Relativgeschwindigkeit und ihre Komponenten. Die transformierte Führungsgeschwindigkeit ist parallel zur Ordinatenachse und konstant:

$$\overline{u} = \frac{\varrho}{r} u = \varrho w.$$

Es handelt sich also im transformierten System um eine Bewegung, die ähnlich der im Abschnitt **3** besprochenen in einer gleichförmig in sich selbst verschobenen Ebene abläuft. Es gilt aber nicht (6), und die Absolutbeschleunigung steht bei der Bewegung im transformierten System nicht mehr normal zur Relativgeschwindigkeit. Abb. 8 bezieht sich auf dasselbe Beispiel, wie es oben durchgeführt wurde. Es wurde $\varrho = 0{,}43$ m gewählt, womit sich folgende Werte für die Geschwindigkeiten der Bewegung im transformierten System ergaben:

$\overline{x}$	$\overline{c}$	$\overline{c}_x = \overline{v}_x$	$\overline{c}_y$	$\overline{x}$	$\overline{c}$	$\overline{c}_x = \overline{v}_x$	$\overline{c}_y$
(m)	(m/s)	(m/s)	(m/s)	(m)	(m/s)	(m/s)	(m/s)
− 0,155	3,10	3,10	0	− 0,065	4,21	3,88	− 1,65
− 0,141	3,36	3,35	− 0,34	− 0,053	4,29	3,90	− 1,79
− 0,127	3,58	3,52	− 0,63	− 0,042	4,35	3,91	− 1,91
− 0,114	3,76	3,65	− 0,89	− 0,031	4,41	3,91	− 2,02
− 0,101	3,90	3,74	− 1,12	− 0,021	4,45	3,91	− 2,12
− 0,089	4,03	3,80	− 1,32	− 0,011	4,49	3,91	− 2,20
− 0,076	4,13	3,85	− 1,50	− 0,000	4,52	3,91	− 2,27

Die Führungsgeschwindigkeit ist $\overline{u} = 3{,}46$ m/s, so daß man stets $\overline{v}_y = \overline{c}_y + 3{,}46$ m/s findet. Nachdem die Hodographen $\overline{H}_{abs}$ und $\overline{H}_{rel}$ der transformierten Bewegung gezeichnet sind, von denen der eine aus dem andern durch Verschiebung um $\overline{u}$ parallel zur Ordinatenachse entsteht, und ihre Punkte mit den ihnen entsprechenden Werten von r beziffert sind, kann man lediglich durch Parallelverschiebungen wie im Abschnitt **3** aus ihnen Absolutbahn und Relativbahn der transformierten Bewegung herleiten. Die Ergebnisse können dann leicht wieder ins Polarkoordinatensystem zurücktransformiert werden.

Durch einen Grenzübergang, bei dem $u = r_0 w =$ konstant gesetzt wird, ω/r durch ω, $r - r_0$ durch x und r_0/r durch 1 ersetzt wird, gehen die Ergebnisse des Abschnitts **6** in die entsprechenden des Abschnitts **3** über.

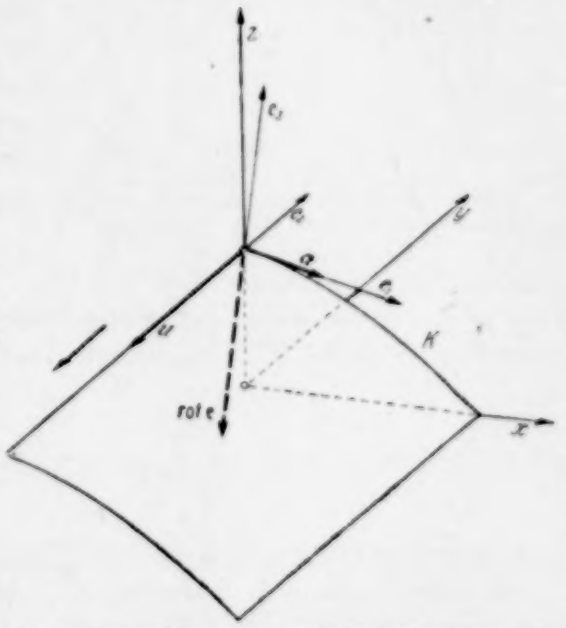

Abb. 9. Bewegung in einer parallel zu ihrer Erzeugenden gleichförmig verschobenen Zylinderfläche. Koordinatensystem mit Einheitsvektoren.

10. Bewegung in einer parallel zu ihrer Erzeugenden gleichförmig verschobenen Zylinderfläche. Eine Zylinderfläche Φ sei entstanden durch Verschiebung einer in der (x, z)-Ebene liegenden Kurve K (Abb. 9). Die Zylindererzeugenden seien parallel zur y-Achse. Die von einem Punkt der Zylinderfläche Φ ausgehenden drei Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_3$ seien so bestimmt, daß $\mathfrak{e}_1$ stets Tangente an die durch Verschiebung der Leitkurve K erhaltene Kurve ist, daß $\mathfrak{e}_2$ mit der y-Achse gleichgerichtet ist, und daß $\mathfrak{e}_3$ zusammen mit $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ ein Rechtssystem bestimmt. Die Relativbewegung sei auf die Zylinderfläche Φ beschränkt. Die in der Tangentialebene der Zylinderfläche Φ liegende Relativgeschwindigkeit sei

$$\mathfrak{v} = v_1 \mathfrak{e}_1 + v_2 \mathfrak{e}_2.$$

Die Zylinderfläche Φ sei einer gleichförmigen Translation in Richtung ihrer Erzeugenden unterworfen. Die konstante Führungsgeschwindigkeit werde in der Richtung der negativen y-Achse angenommen:

$$\mathfrak{u} = -u\,\mathfrak{e}_2 \quad (u>0).$$

Die dann auch in der Tangentialebene der Zylinderfläche Φ liegende Absolutgeschwindigkeit sei

$$\mathfrak{c} = c_1\,\mathfrak{e}_1 + c_2\,\mathfrak{e}_2.$$

Es werden folgende krummlinigen Koordinaten eingeführt:

x als Kurvenlänge von K gemessen von einem in der (y, z)-Ebene liegenden Anfangspunkt 0 an in Richtung von $\mathfrak{e}_1$, y als Länge auf der Zylindererzeugenden von 0 aus in Richtung von $\mathfrak{e}_2$ und z auf der Flächennormalen der Zylinderfläche Φ in Richtung von $\mathfrak{e}_3$. Weil c_1 und c_2 nicht von z abhängen, ist

$$\operatorname{rot}\mathfrak{c} = -\omega\,\mathfrak{e}_3 \quad (\omega>0),$$

wobei die Konstante ω die Dimension einer Winkelgeschwindigkeit hat. Daher ist

$$[\mathfrak{u}, \operatorname{rot}\mathfrak{c}] = \mathfrak{a} = a\,\mathfrak{e}_1 \quad (a>0),$$

und es ist

$$a = u\omega.$$

Für das Folgende wird a konstant gefordert. Es gelten dann alle Entwicklungen des Abschnitts **3**, wenn c_x durch c_1 und c_y durch c_2 ersetzt werden.

Wird die Zylinderfläche Φ in eine Ebene abgewickelt, so ist die Bewegung in der Zylinderfläche Φ auf eine ebene Bewegung konform abgebildet, die völlig der im Abschnitt **3** besprochenen Bewegung entspricht. Die dort erhaltene Relativbahn und Absolutbahn muß schließlich wieder auf die Zylinderfläche Φ übertragen werden, was mittels der Koordinaten x und y, die bei der Abwicklung ihre Längen ja nicht geändert haben, leicht geschehen kann.

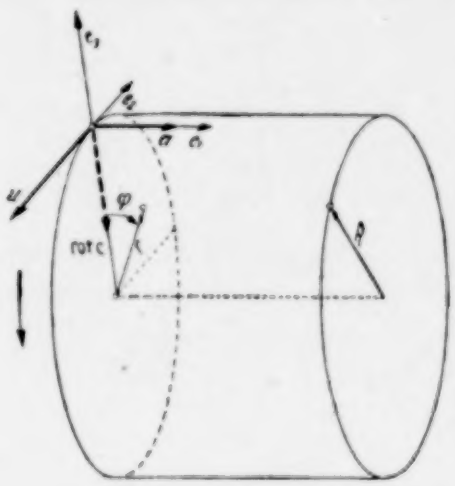

Abb. 10. Bewegung in einer gleichförmig um ihre Achse rotierenden Drehzylinderfläche. Koordinatensystem mit Einheitsvektoren.

11. Bewegung auf einer gleichförmig um ihre Achse rotierenden Drehzylinderfläche. Ein Drehzylinder Φ habe den Halbmesser R. Von einem seiner Punkte gehen drei Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_3$ aus. Der Vektor $\mathfrak{e}_1$ liege in einer Zylindererzeugenden, der Vektor $\mathfrak{e}_2$ sei Tangente an einen Basiskreis des Zylinders Φ, der Vektor $\mathfrak{e}_3$ liege in einer Flächennormalen des Zylinders Φ und bestimme mit $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ ein Rechtssystem (Abb. 10). Die Relativbewegung sei auf die Zylinderfläche Φ beschränkt. Die in der Tangentialebene der Zylinderfläche Φ liegende Relativgeschwindigkeit sei

$$\mathfrak{v} = v_1\,\mathfrak{e}_1 + v_2\,\mathfrak{e}_2.$$

Die Zylinderfläche Φ sei einer gleichförmigen Rotation um ihre Achse mit der Winkelgeschwindigkeit w so unterworfen, daß jeder Punkt auf der Zylinderfläche Φ die dem Vektor $\mathfrak{e}_2$ entgegengesetzt gerichtete Führungsgeschwindigkeit

$$\mathfrak{u} = -u\,\mathfrak{e}_2 = -Rw\,\mathfrak{e}_2 \quad (w>0)$$

erhält.

Die dann auch in der Tangentialebene des Zylinders Φ liegende Absolutgeschwindigkeit sei

$$\mathfrak{c} = c_1\,\mathfrak{e}_1 + c_2\,\mathfrak{e}_2,$$

wobei wegen (3) $c_1 = v_1$ und $c_2 = v_2 - u$ ist.

Werden Zylinderkoordinaten x, φ und r so eingeführt, daß x die auf der Zylindererzeugenden von einem willkürlich gewählten Basiskreis an in der Richtung des Vektors $\mathfrak{e}_1$ gemessene Länge, φ der Winkel ist, um den man eine willkürlich gewählte Anfangslage der von der Zylinderachse ausgehenden Halbebene entgegengesetzt dem Sinne der Winkelgeschwindigkeit w drehen muß, bis sie in den zu betrachtenden Punkt fällt, und r den Abstand von der Zylinderachse bedeutet, so ergibt sich, weil für c_1 und c_2 stets $r = R = \text{konst.}$ ist,

$$\operatorname{rot}\mathfrak{c} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial R c_2}{\partial x} - \frac{\partial c_1}{\partial \varphi}\right)\mathfrak{e}_3 = \left(\frac{\partial c_2}{\partial x} - \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial c_1}{\partial \varphi}\right)\mathfrak{e}_3 = -\Omega\,\mathfrak{e}_3 \quad (\Omega>0)$$

als Vektor entgegengesetzt zu $\mathfrak{e}_3$ gerichtet.

Deshalb ist wegen (6)

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\;\mathfrak{c}^2 = [\mathfrak{u},\,\mathrm{rot}\;\mathfrak{c}] = \mathfrak{a} = a\,\mathfrak{e}_1 \quad (a>0),$$

ein mit $\mathfrak{e}_1$ gleichgerichteter Vektor, und es ist

$$a = u\,\Omega = R w\,\Omega .$$

Wird für das Folgende a konstant gefordert, so ist auch Ω konstant. Wird $R\Omega = \omega$ ($\omega > 0$ konstant) gesetzt, so ist $a = w\omega$. Ähnlich wie im Abschnitt **3** erhält man

$$\mathfrak{c}^2 = 2\,a\,x + b .$$

Für $R\varphi = y$, $\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}_x$ und $\mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}_y$ gelten die Entwicklungen und Ergebnisse des Abschnitts **3**, wenn überall die dort auftretende Größe ω durch Ω ersetzt wird.

Wird die Zylinderfläche Φ in eine Ebene abgewickelt, so ist die Bewegung in der Zylinderfläche Φ auf eine ebene Bewegung konform abgebildet, die völlig der im Abschnitt **3** besprochenen Bewegung entspricht. Als konstante Führungsgeschwindigkeit für die transformierte Bewegung tritt $u = Rw$ auf. Die dort gefundene Relativbahn und Absolutbahn muß schließlich wieder auf die Zylinderfläche übertragen werden.

12. Beispiel. Der Zylinderhalbmesser sei $R = 0{,}20$ m, die Winkelgeschwindigkeit $w = 20{,}95\,1/\mathrm{s}$. Das bewegte System liege zwischen den Parallelkreisen für $x = 0$ und $x = 0{,}12$ m (Abb. 11). Die absolute Eintrittsgeschwindigkeit ins bewegte System sei $c_0 = 2{,}16$ m/s und habe die Richtung der Zylindererzeugenden. Der Austritt aus dem bewegten System geschehe mit der Absolutgeschwindigkeit $c_1 = 4{,}52$ m/s. Wird die Zylinderfläche Φ verebnet, so erhält man mit der konstanten Führungsgeschwindigkeit $u = Rw = 4{,}19$ m/s genau die gleichen Angaben, wie sie dem Beispiel Abschnitt **5** zugrunde lagen. Die dort gefundenen Ergebnisse gelten daher auch für das vorliegende Beispiel und sind in Abb. 11, auf den Zylinder übertragen, wiedergegeben.

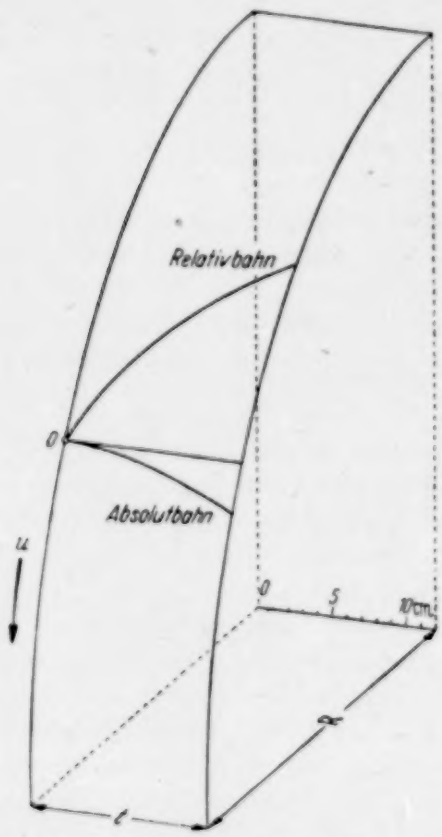

Abb. 11. Bahnkurven für eine Gleichdruckströmung auf einer gleichförmig um ihre Achse rotierenden Drehzylinderfläche.

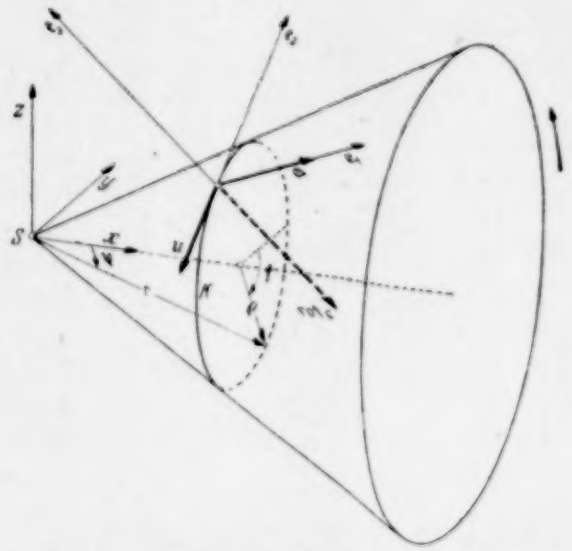

Abb. 12. Bewegung auf einer gleichförmig um ihre Achse rotierenden Drehkegelfläche. Koordinatensystem mit Einheitsvektoren.

13. Bewegung auf einer gleichförmig um ihre Achse rotierenden Drehkegelfläche. Ein Drehkegel Φ habe die Spitze S, seine Erzeugenden schließen mit der Kegelachse den Winkel ψ ein. Von einem seiner Punkte gehen drei Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_3$ aus. Der Vektor $\mathfrak{e}_1$ liege in einer Kegelerzeugenden, der Vektor $\mathfrak{e}_2$ sei Tangente an einen auf dem Drehkegel Φ liegenden Kreis K, der Vektor $\mathfrak{e}_3$ liege in einer Flächennormalen des Drehkegels Φ und bestimme mit $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ ein Rechtssystem (Abb. 12). Die Relativbewegung sei auf die Kegelfläche Φ beschränkt. Die in der Tangentialebene der Kegelfläche Φ liegende Relativgeschwindigkeit sei

$$\mathfrak{v} = r_1\,\mathfrak{e}_1 + r_2\,\mathfrak{e}_2 .$$

Die Drehkegelfläche Φ rotiere gleichförmig um ihre Achse mit der Winkelgeschwindigkeit w so, daß jeder Punkt der Kegelfläche Φ die dem Vektor $\mathfrak{e}_2$ entgegengesetzte Führungsgeschwindigkeit

$$\mathfrak{u} = -u\,\mathfrak{e}_2 = -\varrho w\,\mathfrak{e}_2 = -r\sin\psi w\,\mathfrak{e}_2 \quad \left(w>0,\ r>0,\ 0<\psi<\frac{\Pi}{2}\right)$$

erhält, wenn ϱ den Abstand des betreffenden Punktes von der Drehachse und r seinen Abstand vom Kegelscheitel bedeutet.

Die dann auch in der Tangentialebene des Drehkegels Φ liegende Absolutgeschwindigkeit sei

$$\mathfrak{c} = c_1\,\mathfrak{e}_1 + c_2\,\mathfrak{e}_2,$$

wobei wegen (3) $c_1 = v_1$ und $c_2 = v_2 - u$ ist. Werden Kegelkoordinaten r, γ und ψ so eingeführt, daß r die auf der Kegelerzeugenden vom Kegelscheitel S an in der Richtung des Vektors $\mathfrak{e}_1$ gemessene Länge, γ der Winkel, um den man eine willkürlich gewählte Anfangslage der von der Kegelachse ausgehenden Halbebene entgegengesetzt dem Sinne der Winkelgeschwindigkeit w drehen muß, bis sie den zu betrachtenden Punkt enthält, und ψ der Winkel ist, den die Verbindungsgerade dieses Punktes und des Kegelscheitels S mit der Kegelachse einschließt, so ergibt sich, weil für c_1 und c_2 stets ψ konstant ist,

$$\operatorname{rot}\mathfrak{c} = \frac{1}{r\sin\psi}\left[\frac{\partial\,(r\sin\psi\cdot c_2)}{\partial\,r} - \frac{\partial\,c_1}{\partial\,\gamma}\right]\mathfrak{e}_3 = \frac{1}{r}\left(c_2 + r\frac{\partial\,c_2}{\partial\,r} - \frac{\partial\,c_1}{\sin\psi\cdot\partial\,\gamma}\right)\mathfrak{e}_3 = -\frac{\omega}{r}\,\mathfrak{e}_3 \quad (\omega>0)$$

als Vektor entgegengesetzt gerichtet zu $\mathfrak{e}_3$.

Deshalb ist wegen (6)

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad}\mathfrak{c}^2 = [\mathfrak{u}, \operatorname{rot}\mathfrak{c}] = \mathfrak{a} = a\,\mathfrak{e}_1 \quad (a>0)$$

ein mit $\mathfrak{e}_1$ gleichgerichteter Vektor, und es ist

$$a = u\frac{\omega}{r} = \omega w\sin\psi.$$

Wird speziell für das Folgende a konstant gefordert, so ist auch ω konstant. Ähnlich wie im Abschnitt **6** erhält man

$$\mathfrak{c}^2 = 2\,ar + b.$$

Wird die Drehkegelfläche Φ in eine Ebene abgewickelt, so gelten, wenn $d\varphi$ den Winkel zwischen zwei benachbarten Kegelerzeugenden in der Abwicklung bedeutet, wegen $\varrho\,d\gamma = r\sin\psi\,d\gamma = r\,d\varphi$ für $\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}_r$ und $\mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}_u$ die Entwicklungen und Ergebnisse des Abschnitts **6**, wenn die dort überall auftretende Größe w durch $w\cdot\sin\psi$ ersetzt wird.

Die Bewegung in der Kegelfläche Φ wird durch die Abwicklung auf eine ebene Bewegung konform abgebildet, die völlig der im Abschnitt **6** besprochenen Bewegung entspricht. Als konstante Winkelgeschwindigkeit für die Drehung des transformierten ebenen Systems tritt $w\cdot\sin\psi$ auf. Die dann nach Abschnitt **6** bestimmte Relativbahn und Absolutbahn muß schließlich wieder auf die Kegelfläche Φ übertragen werden.

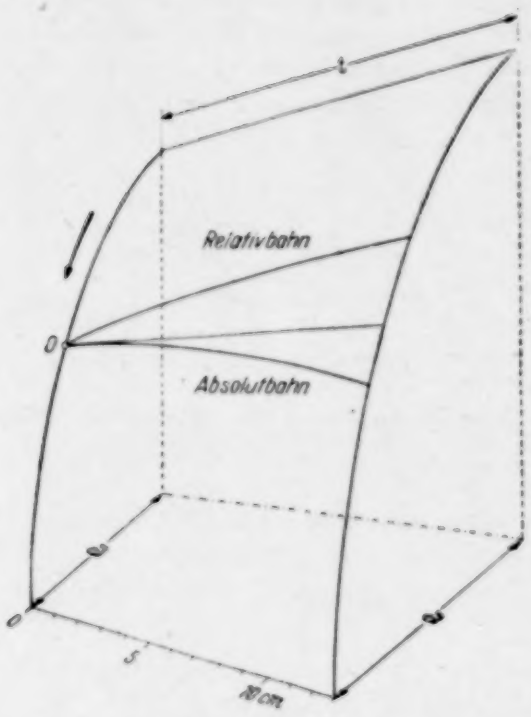

Abb. 13. Bahnkurven für eine Gleichdruckströmung auf einer gleichförmig um ihre Achse rotierenden Drehkegelfläche.

14. Beispiel. Es sei $\sin\psi = 5/13$, und die Winkelgeschwindigkeit für die Rotation des Drehkegels Φ sei $w = 13/5\cdot 8{,}058$ 1/s. Das bewegte System liege zwischen den Parallelkreisen für $r_0 = 0{,}30$ m und $r_e = 0{,}43$ m (Abb. 13). Die absolute Eintrittsgeschwindigkeit ins bewegte System sei $c_0 = 2{,}16$ m/s und habe die Richtung der Kegelerzeugenden. Der Austritt aus dem bewegten System geschehe mit der Absolutgeschwindigkeit $c_e = 4{,}52$ m/s. Wird die Kegelfläche Φ verebnet, so erhält man mit der Winkelgeschwindigkeit 8,058 1/s genau die gleichen Angaben, wie sie dem Beispiel Abschnitt **8** zugrunde lagen. Die dort gefundenen Ergebnisse gelten daher auch für das vorliegende Beispiel und wurden in Abb. 13, auf den Drehkegel Φ übertragen, wiedergegeben.

15. Bewegung auf einer gleichförmig um ihre Achse rotierenden allgemeinen Drehfläche. Eine ebene Kurve M rotiere um eine in ihrer Ebene liegende Achse und erzeuge dabei die Drehfläche Φ (Abb. 14). Von einem Punkt der Drehfläche Φ gehen drei Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_3$ aus. Der Vektor $\mathfrak{e}_1$ sei Tangente an die durch diesen Punkt gehenden Meridiankurve, der Vektor $\mathfrak{e}_2$ sei Tangente an den zugehörigen Parallelkreis K, und der Vektor $\mathfrak{e}_3$ liege in der Flächennormalen der Drehfläche Φ und bestimme mit $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ ein Rechtssystem. Die Relativbewegung sei auf die Drehfläche Φ beschränkt. Die in der Tangentialebene der Drehfläche Φ liegende Relativgeschwindigkeit sei

$$\mathfrak{v} = v_1\,\mathfrak{e}_1 + v_2\,\mathfrak{e}_2.$$

Die Drehfläche Φ rotiere gleichförmig um ihre Achse mit der Winkelgeschwindigkeit w so, daß jeder ihrer Punkte die dem Vektor $\mathfrak{e}_2$ entgegengesetzte Führungsgeschwindigkeit

$$\mathfrak{u} = -u\,\mathfrak{e}_2 = -r\,w\,\mathfrak{e}_2 \qquad (u>0,\ w>0)$$

erhält, wenn r den Halbmesser des zugehörigen Parallelkreises der Drehfläche Φ bedeutet.

Die dann auch in der Tangentialebene der Drehfläche Φ liegende Absolutgeschwindigkeit sei

$$\mathfrak{c} = c_1\,\mathfrak{e}_1 + c_2\,\mathfrak{e}_2,$$

wobei wegen (3) $c_1 = v_1$ und $c_2 = v_2 - u$ ist.

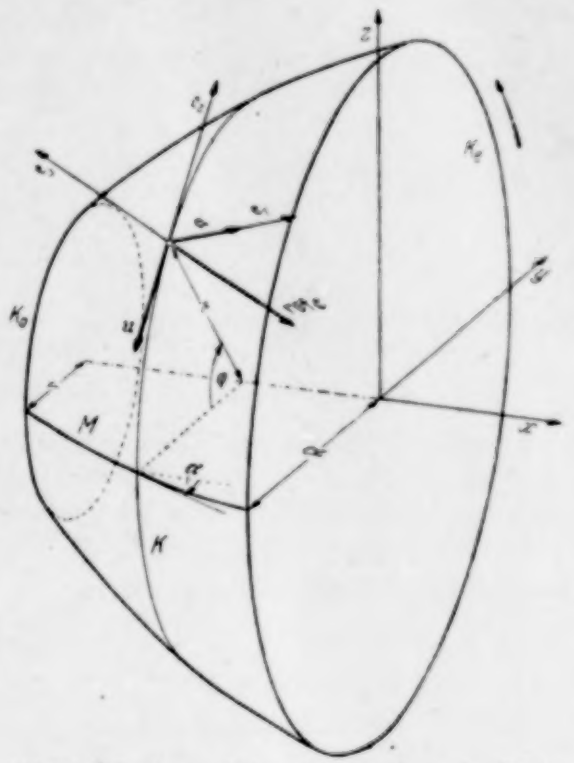

Abb. 14. Bewegung auf einer gleichförmig um ihre Achse rotierenden allgemeinen Drehfläche. Koordinatensystem und Einheitsvektoren.

Auf der Drehfläche Φ werden die Koordinaten l und φ so eingeführt, daß l die auf einer Meridiankurve M von einem beliebigen Parallelkreis K_0 an in Richtung des Vektors $\mathfrak{e}_1$ gemessene Kurvenlänge ist und φ der Winkel ist, um den man eine willkürlich gewählte Anfangslage der von der Drehachse ausgehenden Halbebene entgegengesetzt dem Sinne der Winkelgeschwindigkeit w drehen muß, bis sie den zu betrachtenden Punkt enthält. Für eine dritte Koordinate werde nur die Forderung gestellt, daß sie in jedem Punkt der Drehfläche in der Flächennormalen im Sinne des Vektors $\mathfrak{e}_3$ ihren Ausgang nimmt. Für jeden Punkt der Drehfläche ist sie daher gleich Null, und c_1 und c_2 sind von ihr nicht abhängig.

Deshalb ergibt sich

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathfrak{c} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\,c_2)}{\partial l} - \frac{\partial c_1}{\partial \varphi}\right]\mathfrak{e}_3 \\ &= \frac{1}{r}\left[r\,\frac{\partial c_2}{\partial l} + c_2\,\frac{\partial r}{\partial l} - \frac{\partial c_1}{\partial \varphi}\right]\mathfrak{e}_3 = -\frac{\omega}{r}\,\mathfrak{e}_3 \quad (\omega>0)\end{aligned} \tag{25}$$

als Vektor entgegengesetzt gerichtet zu $\mathfrak{e}_3$.

Deshalb ist wegen (6)

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad}\mathfrak{c}^2 = [\mathfrak{u}, \operatorname{rot}\mathfrak{c}] = \mathfrak{a} = a\,\mathfrak{e}_1 \quad (a>0)$$

ein mit $\mathfrak{e}_1$ gleichgerichteter Vektor, und es ist

$$a = u\,\frac{\omega}{r} = w\,\omega.$$

Wird speziell für das Folgende a konstant gefordert, so ist auch ω konstant. Ähnlich wie früher erhält man

$$\mathfrak{c}^2 = 2\,a\,l + b.$$

Wenn die Meridiankurve M durch $r = f(x)$ gegeben ist, so folgt

$$\frac{dr}{dl} = \sin\alpha = g(l).$$

Aus (25) und wegen $c_1^2 + c_2^2 = \mathfrak{c}^2 = 2\,a\,l + b$ erhält man das System

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_1}{\partial \varphi} - r\,\frac{\partial c_2}{\partial l} &= c_2 \cdot g(l) + \omega\,, \\ c_1\,\frac{\partial c_1}{\partial \varphi} + c_2\,\frac{\partial c_2}{\partial \varphi} &= 0\,, \\ c_1\,\frac{\partial c_1}{\partial l} + c_2\,\frac{\partial c_2}{\partial l} &= a\,,\end{aligned}$$

aus dem man die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$[c_2\, g(l)+\omega]\sqrt{-c_2^2+2\,al+b}+r\sqrt{-c_2^2+2\,al+b}\;\frac{\partial c_2}{\partial l}+c_2\frac{\partial c_2}{\partial \varphi}=0$$

herleitet, die für c_2 die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dc_2}{dl}+\frac{g(l)}{r}\cdot c_2=-\frac{\omega}{r} \tag{26}$$

ergibt. Wegen $dl=dr/g$ geht (26) über in

$$\frac{dc_2}{dr}+\frac{1}{r}c_2=-\frac{\omega}{rg}\,. \tag{26a}$$

Daraus folgt die Lösung

$$c_2=\frac{r_0}{r}\left(\alpha-\frac{\omega}{r_0}\int_{r_0}^{r}\frac{dx}{g}\right)=\frac{r_0}{r}\left(\alpha-\frac{\omega}{r_0}\int_0^l dl\right)=\frac{r_0}{r}\left(\alpha-\frac{\omega}{r_0}l\right). \tag{26b}$$

Für $l=0$, wofür $r=r_0$ wird, erhält man die Integrationskonstante $\alpha=c_{2_0}$. Es ist also

$$c_2=\frac{r_0 c_{2_0}}{r}-\frac{al}{u} \tag{26c}$$

als Funktion der Kurvenlänge l bestimmt, wenn aus der Gleichung der Meridiankurve r als Funktion der Kurvenlänge l entnommen werden kann, was meist nicht in geschlossener Form möglich sein wird und daher aus einer Zeichnung entnommen werde muß.

Aus c_2 können dann c_1, v_1 und v_2 als Funktionen der Kurvenlänge l hergeleitet werden. Dabei kann folgende Beziehung für die Relativgeschwindigkeit v benützt werden. Aus

$$v^2=c_1^2+(c_2+u)^2=c^2+u^2+2\,uc_2$$

erhält man wegen (26c)

$$v^2-u^2=2\,al+c_0^2+2\,u\left(\frac{r_0 c_{2_0}}{r}-\frac{al}{u}\right)=c_u^2+2\,u_0 c_{2_0}=v_0^2-u_0^2=\text{konst.} \tag{27}$$

Geschieht der Eintritt ins bewegte System speziell in der Richtung des Meridians der Drehfläche Φ, so gilt

$$c_2=-\frac{al}{u}\qquad\text{und}\qquad v^2-u^2=c_0^2.$$

Die Beziehung (27) ist kennzeichnend für Gleichdruck. Sie läßt sich nämlich ebenso herleiten, wenn für die Absolutgeschwindigkeit c irgendein Verlauf, also nicht speziell $c^2=2al+c_0^2$, vorgegeben ist. Für irgendeine Gleichdruckströmung entlang eines Stromfadens ergibt sich der Wert der Relativgeschwindigkeit

$$v=\sqrt{v_0^2+w^2\,(r^2-r_0^2)} \tag{27a}$$

und ist also nur von r abhängig, wenn bekannt ist, in welchem Abstand r_0 und mit welcher relativen Geschwindigkeit v_0 das bewegte Teilchen ins bewegte System eintritt.

Geschieht der Eintritt ins bewegte System speziell in Richtung des Meridians der Drehfläche Φ, so ist

$$v=\sqrt{c_0^2+u^2}\,.$$

Die Bewegung auf der Drehfläche Φ soll nun konform abgebildet werden in eine Bewegung auf einem mit der Drehfläche Φ koachsialen Drehzylinder, dessen willkürlich wählbarer Halbmesser R sei. Diese Zylinderfläche werde dann abgewickelt, womit die Bewegung konform auf eine ebene Bewegung abgebildet ist[1].

Die Transformation

$$\bar{x}=R\int_0^l\frac{dl}{r},\qquad \bar{y}=R\varphi \tag{28}$$

führt die Parallelkreise der Drehfläche Φ über in das zur Ordinatenachse parallele Parallelstrahlenbüschel, während die Meridiane der Drehfläche Φ in das zur Abszissenachse parallele Parallelstrahlenbüschel übergeführt werden. Die Geraden dieser Büschel sollen mit den ihnen entsprechenden Werten von l bzw. φ beziffert werden.

[1] *F. Prášil*, Schweiz. Bauztg. 52 (1908) Heft 7/8.

Zur Geschwindigkeit v der Bewegung auf der Drehfläche Φ erhält man die entsprechende Geschwindigkeit $\bar{v}$ für die ebene Bewegung, die ihr in der konformen Abbildung entspricht, durch

$$\bar{v} = \frac{R}{r} v . \tag{29}$$

Gleichung (26b) ergibt damit für die transformierte ebene Bewegung die zur Ordinatenachse parallele Komponente $\bar{c}_y$ der Absolutgeschwindigkeit. Aus

$$\bar{c}^2 = \bar{c}_x^2 + \bar{c}_y^2 = \frac{R^2}{r^2} c^2 = \frac{R^2}{r^2} (2 a l + c_0^2)$$

und der zur Ordinatenachse parallelen, konstanten Führungsgeschwindigkeit der transformierten ebenen Bewegung

$$\bar{u} = \frac{R}{r} u = R w \tag{30}$$

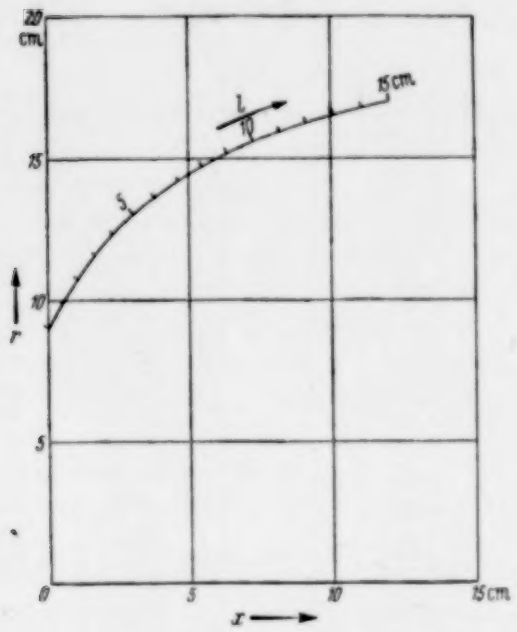

Abb. 15. Meridiankurve einer gleichförmig um ihre Achse rotierenden allgemeinen Drehfläche.

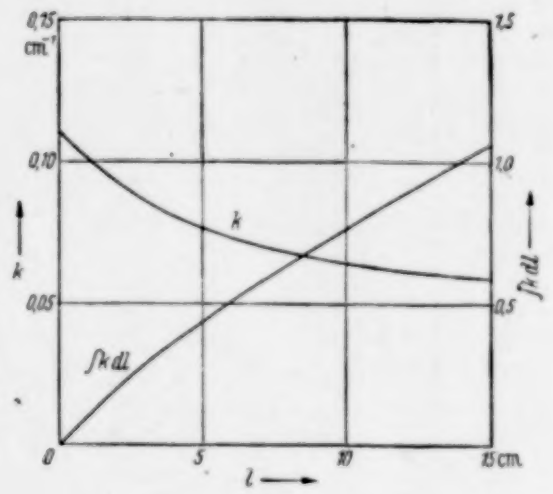

Abb. 16. $k = \frac{1}{r}$ und $\int_0^l k\, dl$ als Funktionen der Kurvenlänge l.

kann der Absoluthodograph $\overline{H}_{abs}$ der transformierten ebenen Bewegung punktweise ermittelt werden. Ganz analog wie im Abschnitt **3** findet man daraus die Absolutbahn der transformierten ebenen Bewegung. Ebenso werden Relativhodograph $\overline{H}_{rel}$ und Relativbahn bestimmt. Weil die Führungsgeschwindigkeit $\bar{u}$ der transformierten Bewegung konstant ist, entsteht der Relativhodograph $\overline{H}_{rel}$ aus dem Absoluthodographen $\overline{H}_{abs}$ durch Verschiebung um $-\bar{u}$. Wird als Pol für den Relativhodographen $\overline{H}_{rel}$ der Punkt Q verwendet, der aus dem Pol P des Absoluthodographen H_{abs} durch Verschiebung um $+\bar{u}$ hervorgeht, dann fallen beide Hodographen zusammen.

Die Geschwindigkeiten müßten nicht transformiert werden, wenn man die Kurven

$$\left.\begin{aligned} \xi &= c_1 \\ \eta &= c_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{bzw.} \quad \left.\begin{aligned} \xi &= v_1 \\ \eta &= v_2 \end{aligned}\right\}$$

zeichnet. Es legen dann ihre einem bestimmten Wert der Kurvenlänge l entsprechenden Punkte verbunden mit dem Koordinatenursprung bereits die Richtungen von $\bar{c}$ bzw. $\bar{v}$ fest, nur müßten dann aber tatsächlich beide Kurven gezeichnet werden.

Das in (28) auftretende Integral wird i. A. nicht in geschlossener Form darstellbar sein und muß daher numerisch oder graphisch ausgewertet werden.

Schließlich sind Absolutbahn und Relativbahn der transformierten ebenen Bewegung wieder auf die ursprüngliche Drehfläche Φ zurück zu übertragen.

Werden für die Meridiankurve M der Drehfläche Φ spezielle Annahmen gemacht, so kann man aus den hier allgemein gegebenen Formeln die früher in den Abschnitten **6**, **11** und **13** hergeleiteten Ergebnisse finden.

16. Beispiel. Die in Abb. 15 dargestellte Kurve rotiere gleichförmig um die X-Achse und erzeuge die Drehfläche Φ. Die konstante Winkelgeschwindigkeit sei $w = 21{,}08\,1/s$. Der Abb. 15 kann $1/r$ als Funktion der Kurvenlänge l entnommen werden. Diese Funktion wurde in Abb. 16 dargestellt und aus ihr durch graphische Integration $\int_0^l dl/r$ als Funktion der Kurvenlänge l ermittelt.

Der Eintritt ins bewegte System geschehe auf dem Parallelkreis mit dem Halbmesser $r_0 = 0{,}09$ m, auf dem die Zählung der Kurvenlänge l beginne, in der Richtung des Meridians mit der absoluten Eintrittsgeschwindigkeit $c_0 = 2{,}16$ m/s, so daß $c_{1_0} = c_0$ und $c_{2_0} = 0$ ist. Die absolute Austrittsgeschwindigkeit für $l = 0{,}15$ m betrage $c_e = 4{,}52$ m/s. Die Konstante a erhält daher den Wert $a = 52{,}549\ \mathrm{m/s^2}$, und es wird $\omega = a/w = 2{,}4928$ m/s.

Gleichung (26c) liefert dann für jeden Wert von l die entsprechende Umfangskomponente c_2 der Absolutgeschwindigkeit c.

l	r	c	c_2	$\bar{c}$	$\bar{c}_y$	$\bar{x}$
(m)	(m)	(m/s)	(m/s)	(m/s)	(m/s)	(m)
0,00	0,090	2,16	− 0,00	4,08	− 0,00	0,000
0,01	0,099	2,39	− 0,25	4,10	− 0,43	0,018
0,02	0,107	2,60	− 0,47	4,13	− 0,75	0,034
0,03	0,116	2,80	− 0,64	4,12	− 0,94	0,048
0,04	0,123	2,98	− 0,81	4,12	− 1,12	0,061
0,05	0,130	3,15	− 0,96	4,12	− 1,26	0,073
0,06	0,136	3,31	− 1,10	4,14	− 1,38	0,086
0,07	0,142	3,47	− 1,23	4,15	− 1,47	0,097
0,08	0,147	3,62	− 1,36	4,18	− 1,57	0,108
0,09	0,152	3,76	− 1,48	4,21	− 1,66	0,119
0,10	0,156	3,90	− 1,60	4,25	− 1,74	0,129
0,11	0,159	4,03	− 1,72	4,30	− 1,84	0,140
0,12	0,162	4,16	− 1,85	4,35	− 1,94	0,150
0,13	0,165	4,28	− 1,96	4,40	− 2,02	0,160
0,14	0,168	4,40	− 2,09	4,46	− 2,11	0,170
0,15	0,170	4,52	− 2,20	4,52	− 2,20	0,180

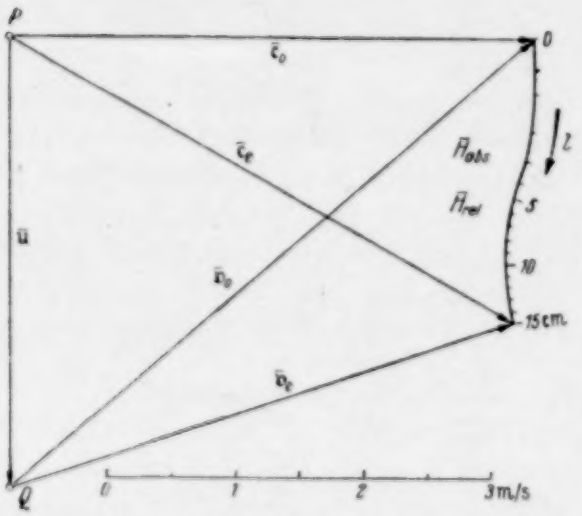

Abb. 17. Hodographen für eine konform abgebildete Gleichdruckströmung in einer gleichförmig um ihre Achse rotierenden allgemeinen Drehfläche.

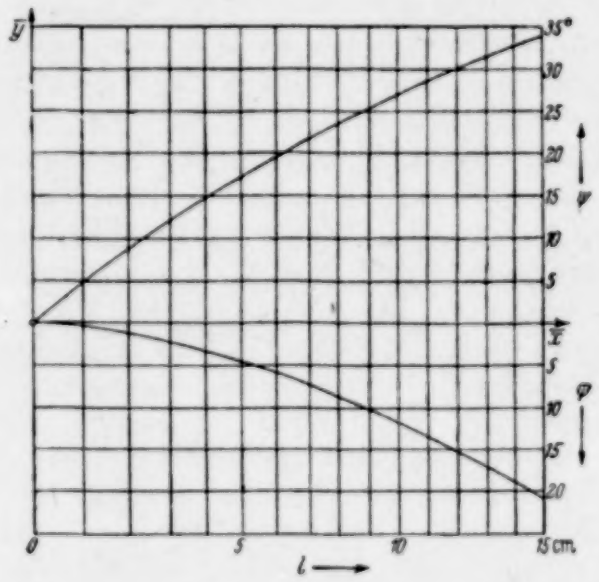

Abb. 18. Konforme Abbildung der Bahnkurven einer Gleichdruckströmung in einer gleichförmig um ihre Achse rotierenden allgemeinen Drehfläche.

Es wurde $R = 0{,}17$ m gewählt, und nach (29) wurde für die transformierte ebene Bewegung $\bar{c}$ und $\bar{c}_y$ berechnet. Die Ergebnisse enthält vorstehende Tabelle.

Abb. 17 stellt die Hodographen dar, wobei P (Q) der Pol für den absoluten (relativen) Hodographen $\overline{H}_{abs}$ ($\overline{H}_{rel}$) ist. Gleichung (28) ergab mit den in Abb. 16 bestimmten Werten die Grundlage für das rechtwinklige Koordinatensystem, in das in Abb. 18 Relativbahn und Absolutbahn der transformierten Bewegung eingezeichnet wurden.

Schließlich (Abb. 19) wurden diese beiden Bahnkurven auf die Drehfläche Φ zurücktransformiert.

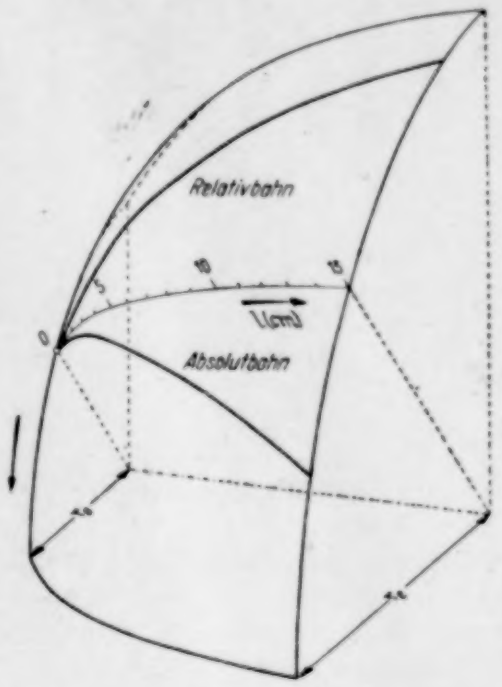

Abb. 19. Bahnkurven einer Gleichdruckströmung in einer gleichförmig um ihre Achse rotierenden allgemeinen Drehfläche.

17. Weiterführung der Entwicklungen. Die Untersuchung in einem System, das einer gleichförmigen Schraubung unterworfen ist, wobei Absolutbahn und Relativbahn auf einer Schraubenfläche liegen, soll hier nicht durchgeführt werden. Es wäre eine Abbildung der Schraubenfläche auf eine abwickelbare Regelschraubenfläche zu betrachten, und diese abwickelbare Regelschraubenfläche wäre zu verebnen.

Wird für die Veränderlichkeit des Quadrates der Absolutgeschwindigkeit ein anderes als lineares Gesetz gefordert, so wird zumindest die entwickelte graphische Methode anwendbar bleiben.

Auch wenn nicht durchweg Gleichdruck vorausgesetzt wird, sondern der Druck p in bestimmter Art veränderlich vorgeschrieben wird, kann ein dem entwickelten Verfahren analoges angegeben werden.

Ebenso werden sich gewisse Umkehraufgaben lösen lassen. Es kann z. B. über die Form der Relativbahn eine Annahme getroffen werden und bei bestimmtem Verlauf der Absolutgeschwindigkeit nach der Veränderlichkeit des Druckes oder bei bestimmtem Druckverlauf (z. B. Gleichdruck) nach der Veränderlichkeit der Absolutgeschwindigkeit gefragt werden.

18. Zusammenfassung. Ausgehend von der *Euler*schen Gleichung für die eindimensionale, stationäre Strömung einer idealen Flüssigkeit, für die der auf die Flächeneinheit bezogene Flüssigkeitsdruck überall konstant angenommen wird, werden Strömungen in bewegten Systemen untersucht. Das System war einer gleichförmigen Translation bzw. einer gleichförmigen Drehung unterworfen. Der Zuwachs des Quadrates der Absolutgeschwindigkeit wurde speziell als linear abhängig von einer Längenkoordinate gefordert. Die sich ergebenden partiellen Differentialgleichungen wurden teils rechnerisch, teils graphisch integriert. Es konnten dann sowohl die Absolutbahn als auch die Relativbahn der Bewegung bestimmt werden.

Über den Zusammenhang der gefundenen Ergebnisse mit einer von *Trefftz* gegebenen Formel, die in einer Patentschrift des Reichspatentamtes veröffentlicht ist, und über darüber hinausgehende Anwendungen im Strömungsmaschinenbau soll später berichtet werden.

(Eingegangen am 11. Oktober 1947.)

Berichtigung

zu meinem Aufsatz in Bd. XVI, S. 77 des Ingenieur-Archivs „Die dreiseitig gelagerte Rechteckplatte (I. Mitteilung)".

Von **K. Goriupp** in Graz.

Einer Mitteilung von Herrn Dr.-Ing. *W. Cornelius* verdanke ich die Aufdeckung einer Unstimmigkeit:

Die von mir abgeleiteten Formeln gestatten nicht (wie von mir irrtümlich angegeben) die Berücksichtigung der Querdehnung ν, da diese schon in den Randbedingungen (12) und (13) vernachlässigt wurde. Bei Vernachlässigung der Querdehnung hingegen ($\nu = 0$) sind die Formeln nach wie vor gültig.

Druckfehlerberichtigung: In der letzten Gleichung der Randbedingung (12) sind die beiden Ziffern „2" zu streichen.

(Eingegangen am 23. Februar 1948.)